



Real
Sociedad
Española de
Física



UNIVERSITAT DE LLEIDA AJUNTAMENT DE LLEIDA
12 a 15 de abril de 2013

XXIV OLIMPIADA ESPAÑOLA DE FÍSICA

ENUNCIADOS Y SOLUCIONES DE LAS PRUEBAS PROPUESTAS

Lleida, 12 al 15 de abril de 2012

Organizan:



Ajuntament de Lleida



Universitat de Lleida

Colaboran:



P1.- La cuerda: compañera inseparable del alpinista.

(10 puntos)

Sense cap dubte, la joia del patrimoni natural de Lleida són les seves muntanyes i, molt especialment, el Parc Nacional d'Aigüestortes i Estany de Sant Maurici. Dos dels seus pics més emblemàtics són les agulles dels Encantats, de més de 2700 m d'alçada. Per això, els esports de muntanya tenen a Lleida un extraordinari arrelament, incloent-hi la seva variant més emocionant i arriscada, l'escalada.

Las cuerdas de montaña, compañeras inseparables de los escaladores, esconden tras su aparente sencillez unas características extraordinarias logradas con una avanzada tecnología en la que la Física, como de costumbre, es la estrella invitada. Estas cuerdas deben soportar elevadas cargas, ser ligeras y flexibles, resistentes a los roces y cortes, estables con la temperatura... y tienen que ser elásticas, es decir extensibles. En este ejercicio vamos a estudiar esta última propiedad y sus límites.

Comencemos con una descripción del uso de la cuerda como elemento protector ante posibles caídas. En la figura 1 se muestra a un escalador que ha llegado al punto C de una pared tras completar un largo de su cuerda. Ha tenido la fundamental precaución de atar firmemente un extremo de la cuerda a la fijación A y pasarla por una anilla (mosquetón) colocada en otra fijación en B. Las distancias entre B y C y entre A y B son respectivamente l_1 y l_2 . La longitud activa de la cuerda es $L = l_1 + l_2$

Si, alcanzado el punto C, el escalador tiene la mala pata de caerse, el recorrido de su vuelo será $h = 2l_1$ y el tirón que sufra cuando la cuerda lo frene será menor que el que sufriría si no hubiese puesto el mosquetón en B, ya que entonces el recorrido hubiese sido $2L$, mayor que h .

En la jerga montañera se define el *factor de caída*, f :

$$f = \frac{h}{L} = \frac{2l_1}{l_1 + l_2}$$

Este factor, que puede tomar valores entre 0 y 2, es un concepto muy importante en escalada ya que representa una medida de la "dureza" de las caídas:

- $f < 1$: caída relativamente suave (el escalador estaba cercano a la fijación B).
- $f = 1$: caída dura (B está a mitad del largo).
- $f > 1$: caída muy dura (el escalador estaba lejos de B).
- $f = 2$: la peor caída posible (sin fijación entre el escalador y el punto A de reunión). Se deben evitar a toda costa. Son muy peligrosas para el escalador y afectan a la durabilidad de la cuerda y de las fijaciones.



Estany de Sant Maurici i Els Encantats

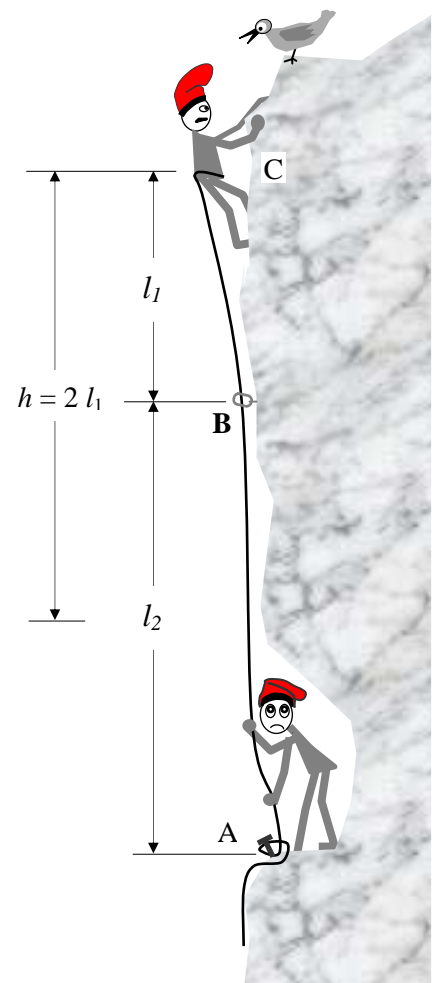


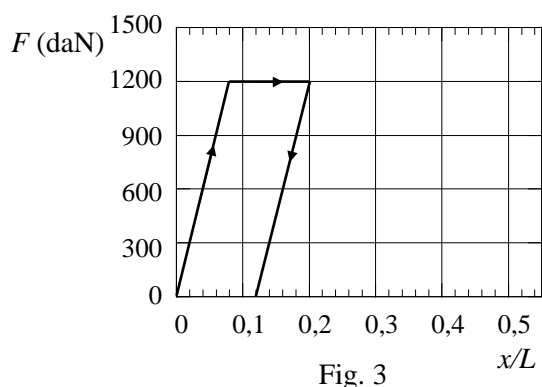
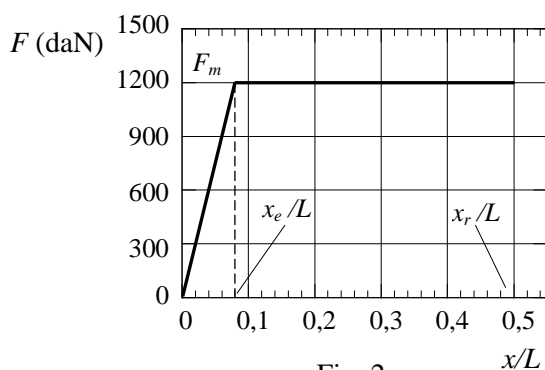
Fig. 1

La protección que la cuerda brinda al escalador consiste en frenar su caída, es decir, convertir su energía mecánica en elástica, alargándose la cuerda una cierta longitud x , como si de un muelle se tratase. Este modelo físico *cuerda* \equiv *muelle* es válido siempre que el alargamiento x esté comprendido en el intervalo $0 \leq x \leq x_e$, donde x_e es el llamado *límite elástico*. La Unión Internacional de Asociaciones de Alpinismo (UIAA) exige a los fabricantes de cuerdas que, como máximo, $x_e/L = 0,08$, es decir x_e no debe superar el 8% de L .

Para alargamientos superiores a x_e el modelo cuerda \equiv muelle deja de funcionar. La tensión no es proporcional al alargamiento sino que toma un valor máximo, F_m , que se mantiene casi constante hasta que, para alargamientos del orden del 50%, la cuerda se rompe (límite de rotura, $x_r \approx 0,5L$).

El valor de esta tensión máxima, F_m , también lo impone la UIAA: no debe exceder¹ los 1200 daN para cuerdas estándar (1 daN = 1decaNewton = 10 N).

Todo este proceso se resume en la gráfica de la figura 2, donde se representa, de forma idealizada, la tensión de una cuerda estándar en función de su *alargamiento unitario*, x/L .



En el intervalo de alargamientos $x_e \leq x \leq x_r$ el comportamiento de la cuerda tiene una importante peculiaridad: su deformación no es elástica sino *plástica*, es decir, la deformación alcanzada dentro de este intervalo es permanente, no desaparece al cesar la tensión. Por ejemplo, en la figura 3 se representa la gráfica correspondiente a una caída que supera el límite elástico, llegando hasta $x/L = 0,2$. Cuando la cuerda se relaje (cuando se anule la tensión) no recuperará la longitud inicial L sino que quedará con un alargamiento permanente del 12%.

Este proceso de deformación plástica acorta la vida de la cuerda, y puede llegar a acortar dramáticamente la vida del escalador, ya que los alargamientos permanentes se van acumulando en sucesivas caídas, acercándose al fatídico límite de rotura.

Después de estas explicaciones, consideremos el caso de un escalador de masa M que sufre una caída de factor f . En el punto más bajo de la caída el alargamiento unitario de la cuerda es x/L y su tensión es F .

- a) En el intervalo de validez del modelo elástico, es decir $x \leq x_e$, obtenga la expresión del alargamiento unitario x/L en función de M , g , F y f .

Suponga en lo que sigue que un montañero de 80 kg usa una cuerda que puede soportar una tensión máxima $F_m = 1200$ daN y cuyos límites elástico y de rotura son $x_e/L = 0,08$ y $x_r/L = 0,5$.

- b) ¿Cuál es el mayor factor f de las caídas que puede sufrir sin que su cuerda se deforme plásticamente?
- c) ¿Cuál será la deformación plástica unitaria de la cuerda en una caída de factor $f = 2$?
- d) ¿Cuántas caídas de tipo $f = 2$ podrá soportar la cuerda sin romperse?

¹ Este valor corresponde, aproximadamente, a la fuerza que actúa sobre una masa de 80 kg para que su aceleración sea de 15g, que es la máxima que un ser humano puede soportar durante un tiempo corto, sin sufrir graves daños.

Solución

- a) Supongamos que el montañero se cae desde el punto C de la figura 4. Durante el recorrido de longitud $h = 2l_1$ la caída es libre, pero a partir del punto B' la cuerda comienza a estirarse y a frenar su caída. El descenso continúa hasta el punto B'', donde el montañero se detiene (velocidad nula) y la cuerda se ha estirado una longitud máxima x .

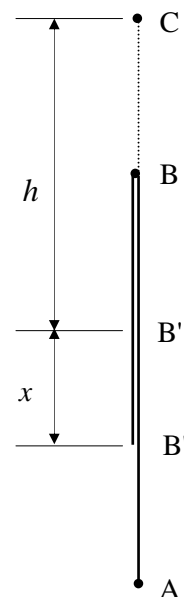


Fig. 4

Durante el recorrido CB' la única fuerza que actúa sobre el montañero es el peso, mientras que entre B' y B'', además del peso, actúa la fuerza elástica. Ambas fuerzas son conservativas, por lo que la energía mecánica debe conservarse. En particular

$$\text{Energía mecánica en C} = \text{Energía mecánica en B''} \quad (1)$$

Mientras los alargamientos de la cuerda no excedan el límite elástico, la cuerda equivale a un muelle de constante $K = F / x$, con una energía potencial elástica

$$U_e = \frac{1}{2} Kx^2 = \frac{1}{2} Fx$$

Luego, tomando como nivel de referencia de energía potencial gravitatoria la horizontal en B'', en virtud de (1) tendremos

$$Mg(h+x) = \frac{1}{2} Fx \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2Mgh}{F - 2Mg}$$

Dividiendo ambos miembros por L y teniendo en cuenta que $f = h / L$, se obtiene la expresión pedida

$$\boxed{\frac{x}{L} = \frac{2Mg f}{F - 2Mg}} \quad (2)$$

- b) Si en la expresión anterior (2) se despeja el factor de caída f , se obtiene

$$f = \frac{F - 2Mg}{2Mg} \frac{x}{L}$$

Con los datos del problema y considerando el máximo alargamiento unitario elástico, $x_e / L = 0,08$, se obtiene que el mayor factor de caída con deformación puramente elástica es

$$\boxed{f = 0,5}$$

- c) Si la caída tiene un factor $f > 0,5$, la cuerda necesariamente sobrepasará su zona de comportamiento elástico, por lo que la deformación de la cuerda será la suma del alargamiento elástico, x_e , y del plástico, x_p (situación análoga a la de la figura 3). En esta caída el montañero recorre una distancia $2L + x_e + x_p$, con un variación de energía potencial gravitatoria

$$\Delta U = -Mg(2L + x_e + x_p)$$

Esta variación debe ser igual al trabajo realizado por la tensión de la cuerda a lo largo de los recorridos elástico y plástico, x_e y x_p , respectivamente

$$W_e = -\frac{1}{2} F_m x_e$$

$$W_p = -F_m x_p$$

Con lo que resulta

$$Mg(2L + x_e + x_p) = \frac{1}{2} F_m x_e + F_m x_p$$

Sustituyendo $x_e = 0,08L$ y despejando x_p/L , se obtiene

$$\frac{x_p}{L} = \frac{2,08 Mg - 0,04 F_m}{F_m - Mg}$$

y con los valores del enunciado resulta

$$\boxed{\frac{x_p}{L} = 0,10}$$

- d) Al llevar este resultado a una gráfica como la de la figura 5, observaremos que en una caída de factor 2, con una cuerda nueva, el alargamiento total unitario es

$$\frac{x_e + x_p}{L} = 0,08 + 0,10 = 0,18$$

Esto supone un alargamiento del 18 %, que corresponde al punto S_1 de la figura 5. Como se ha superado el límite elástico, tras destensarse la cuerda no recuperará su longitud inicial, sino que quedará alargada de forma permanente un 10 %, como puede apreciarse en dicha figura.

Si la misma cuerda vuelve a soportar una nueva caída de factor 2, un razonamiento análogo nos llevaría al alargamiento máximo del punto S_2 de la figura 5, y la deformación permanente de su longitud aumentaría hasta el 20 %. Se comprueba fácilmente que el límite de rotura de la cuerda, el fatídico 50 %, se supera durante la quinta caída. Por tanto, con $f = 2$,

El número máximo de caídas es cuatro

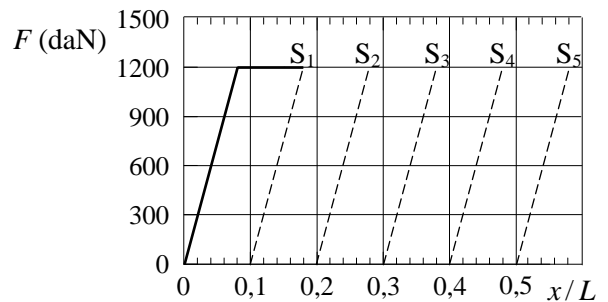


Fig. 5

P1. Tabla de respuestas

Apartado	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Puntos
a	$\frac{x}{L} = \frac{2Mg f}{F - 2Mg}$		3
b		$f = 0,5$	2
c		$x_p / L = 0,10$	2
d		Nº máximo de caídas de factor 2 = cuatro	3

P2.- El efecto Hall.

(10 puntos)

Una forma sencilla de comprobar la presencia de un campo magnético, y medirlo, se basa en el llamado efecto Hall. Dicho efecto fue descubierto por el físico estadounidense Edwin Herbert Hall en 1879, mientras trabajaba en su tesis doctoral en física bajo la dirección de Henry A. Rowland. Los experimentos de Hall demostraron que los portadores de carga en los materiales conductores eran partículas cargadas negativamente. Este hecho fue de gran relevancia en su tiempo, ya que los electrones no serían descubiertos hasta más de diez años después¹.

Para describir este efecto, consideremos un conductor en forma de cinta plana de dimensiones transversales a y b , como se muestra en la figura 1. Una corriente eléctrica, de intensidad I , fluye por la cinta en la dirección positiva del eje X y un campo magnético uniforme \vec{B} atraviesa la cinta en la dirección OY . Los portadores de carga, en este caso electrones de carga $q = -e$, se mueven con una velocidad media \vec{v} en la dirección negativa de OX . En estas circunstancias la acción del campo magnético sobre los electrones tiende a acumularlos en el borde superior de la cinta, y en consecuencia, por defecto de electrones, en el borde inferior aparecerá una distribución de carga positiva.

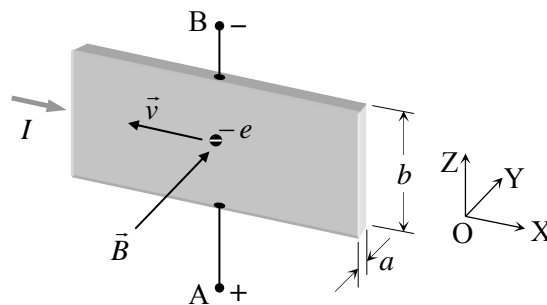


Fig. 1

A medida que se producen estas distribuciones de carga, se establece un campo eléctrico, y por tanto una diferencia de potencial, entre los bordes de la cinta. Cuando se alcanza el equilibrio, la diferencia de potencial V_H entre los bornes A y B se denomina *Voltaje Hall* (o *fem Hall*).

- Determine el voltaje Hall, V_H , en función de la dimensión b , del módulo del campo magnético, B , y del módulo de la velocidad media de los electrones en la cinta, v .
- ¿Cómo se modificaría el Voltaje Hall anterior si la cinta fuese de un material semiconductor y la corriente I se debiese a portadores con carga positiva $q = +e$?
- Demuestre que la intensidad de corriente cumple $I = nqabv$, donde n es el número de portadores de carga por unidad de volumen en el material de la cinta.
- Teniendo en cuenta lo anterior, determine la expresión del Voltaje Hall, V_H , en función de n , I , q , B y de la anchura de la cinta, a .
- Suponga que la cinta es de Cu, con $a = 2,0 \text{ mm}$, $B = 0,40 \text{ T}$ e $I = 75,0 \text{ A}$. Entre los bornes A y B se mide un voltaje Hall $V_H = 0,81 \mu\text{V}$. Sabiendo que $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, calcule el número de electrones por unidad de volumen², n .

Las aplicaciones más importantes del efecto Hall son la determinación del signo de los portadores mayoritarios, el cálculo del número de portadores por unidad de volumen y la medida de campos magnéticos mediante las llamadas *sondas Hall*. Básicamente estas sondas son como la de la figura 1, normalmente hechas con material semiconductor, y con diferentes geometrías que se adaptan a la del campo magnético a medir.

Otro tipo de sonda, de geometría cilíndrica, para medir campos magnéticos en el interior de solenoides o bobinas largas, puede ser el que a continuación se plantea.

¹ En 1895 el Dr. Hall fue nombrado profesor en Harvard, donde desarrolló el resto de su carrera. A pesar de sus descubrimientos, el Dr. Hall no obtuvo el Premio Nobel de Física. Sin embargo, un siglo después, el físico alemán Klaus von Klitzing recibió el Premio Nobel de Física por su trabajo sobre el efecto Hall cuántico.

² Como es lógico, en este ejercicio no se tienen en cuenta efectos cuánticos e interacciones con la red cristalina. El resultado que se obtiene es aproximadamente un 25% mayor que el valor real.

La cinta se substituye por un tubo cilíndrico semiconductor de longitud L y radios r_1 y r_2 , en el que se ha practicado una estrecha ranura o *gap*, como muestra la figura 2. Por la pieza conductora se hace circular una corriente I en sentido radial, de forma que los portadores de carga, con $q=+e$, se mueven desde la parte interior del cilindro hacia la parte exterior, como se muestra en el corte transversal de la figura 3. En toda la región existe un campo magnético uniforme \vec{B} dirigido en paralelo al eje del tubo, como se indica en la figura 2, es decir perpendicular al papel y dirigido hacia adentro en la figura 3.

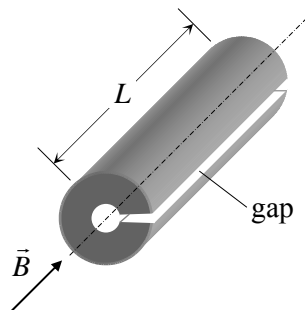


Fig. 2

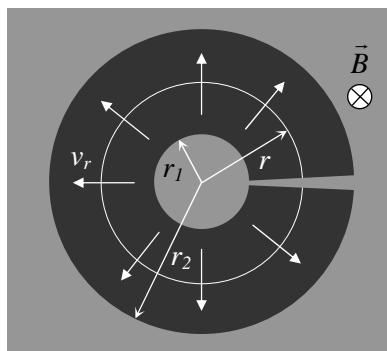


Fig. 3

- f) Despreciando la existencia de la estrecha ranura, pero teniendo en cuenta que la intensidad de corriente I es la carga que atraviesa por unidad de tiempo, en este caso, una superficie cilíndrica de longitud L y radio r , ($r_1 < r < r_2$), obtenga la expresión de la velocidad radial de los portadores de carga, v_r , en un punto cualquiera del conductor, en función de r .
- g) Determine el valor del módulo de la fuerza magnética que actúa sobre un portador de carga q que se encuentra a una distancia r del eje. Expresé el resultado en función de B , n , I , L y r .

Bajo la acción de dicha fuerza, los portadores se desplazarán e irán acumulándose sobre una de las caras de la ranura de la pieza cilíndrica hasta que, en equilibrio, estas partículas cargadas y su defecto de carga en la cara opuesta del gap creen un campo eléctrico \vec{E} , y por tanto una fuerza eléctrica que equilibre la fuerza debida al campo magnético.

- h) Determine el módulo del campo eléctrico, E , en función de q , B , n , I , L y r .

El módulo del campo eléctrico sólo depende de r , lo que equivale a decir que dicho módulo es el mismo en todos los puntos de una circunferencia de radio r . Suponga despreciable la anchura de la ranura frente a la longitud $2\pi r$ de la circunferencia.

- i) Determine el voltaje Hall, V_H , entre las superficies de la ranura del dispositivo.

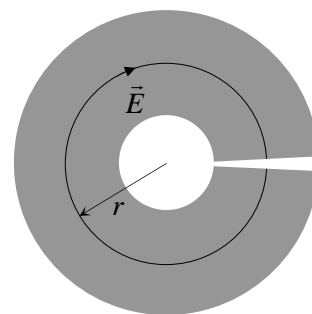


Fig. 4

Solución P2

- a) Debido a la acción del campo magnético, sobre los portadores actúa la fuerza de Lorentz: $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Teniendo en cuenta las direcciones y sentidos del campo y de la velocidad indicados en la figura 1 y que los portadores son electrones de carga $q = -e$, la fuerza \vec{F}_m estará dirigida en el sentido de OZ y su módulo será

$$F_m = evB$$

Esta fuerza dará lugar a una distribución de carga negativa en la parte superior de la cinta mientras que, en la parte inferior, el defecto de electrones, creará una distribución positiva. En estas condiciones, se creará un campo eléctrico, \vec{E} , y se alcanzará un estado de equilibrio cuando la fuerza neta sobre los portadores sea nula, es decir, cuando se verifique

$$\vec{F}_m + (-e)\vec{E} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad E = vB$$

Como \vec{B} es uniforme, \vec{E} también lo será y, por tanto, el voltaje Hall resulta

$$V_H = Eb \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_H = vBb} \quad (1)$$

- b) Si la corriente fluye en el sentido positivo del eje OX y es debida a portadores de carga positiva, la velocidad de los portadores debe tener este mismo sentido. En consecuencia, la fuerza magnética tendería a llevarlos a la parte superior de la cinta. Por tanto,

Cambiará la polaridad de los bornes A y B de la cinta.

- c) La intensidad I se debe al movimiento de los portadores de carga q con una velocidad media v . Esto significa que durante un pequeño intervalo de tiempo Δt , la sección transversal de la cinta es atravesada por la carga Δq contenida en un paralelepípedo de volumen $ab\Delta x$, donde Δx es la distancia que dichos portadores recorren en el tiempo Δt , (figura 5). Si n es el número de portadores por unidad de volumen, se tendrá que

$$\Delta q = qnab\Delta x$$

Como $\Delta x = v\Delta t$

$$\Delta q = qnabv\Delta t$$

Dividiendo ambos miembros por Δt y teniendo en cuenta que $I = \Delta q / \Delta t$, resulta

$$\boxed{I = qnabv} \quad (2)$$

Tal como se quería demostrar.

- d) Eliminando v entre las expresiones (1) y (2) se tiene

$$\boxed{V_H = \frac{IB}{nqa}} \quad (3)$$

- e) Despejando n de (3) y sustituyendo los valores numéricos del enunciado, se obtiene

$$\boxed{n = 1,16 \times 10^{29} \text{ portadores/m}^3}$$

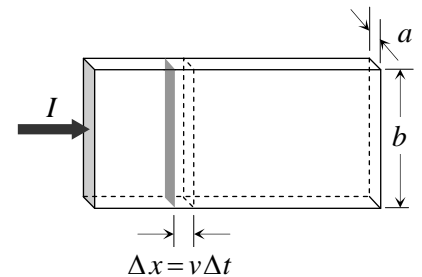


Fig. 5

- f) Salvo la geometría, este apartado es similar al c). Ahora los portadores se mueven con una velocidad radial v_r , y los portadores que en un instante t estén a una distancia r del eje del cilindro, al cabo de un breve intervalo de tiempo Δt habrán atravesado una superficie cilíndrica de área $2\pi r L$ y habrán recorrido una distancia $\Delta r = v_r \Delta t$ (figura 6, en la que, por simplicidad, no se ha dibujado la ranura).

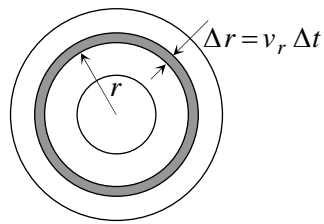


Fig. 6

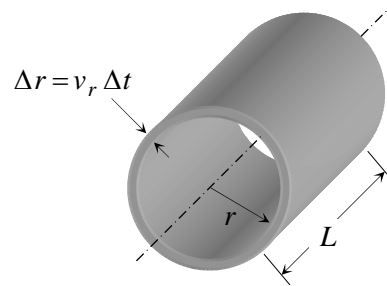


Fig. 7

En ese intervalo de tiempo, la carga Δq que ha atravesado la superficie cilíndrica es la contenida en el volumen $2\pi r \Delta r L$ (figura 7).

$$\Delta q = nq2\pi r L v_r \Delta t \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = nq2\pi r L v_r$$

De donde la velocidad radial de los portadores es

$$\boxed{v_r = \frac{I}{2\pi n q L r}} \quad (4)$$

- g) Por ser \vec{v}_r y \vec{B} perpendiculares, el módulo de la fuerza de Lorentz es

$$F_m = q v_r B$$

Teniendo en cuenta (4), resulta

$$\boxed{F_m = \frac{I B}{2\pi n L r}} \quad (5)$$

- h) De forma análoga al apartado (a), se establece el equilibrio con un campo eléctrico que verifique $\vec{F} + q\vec{E} = \vec{0}$. Pero ahora las líneas del campo \vec{E} son circulares en el sentido de las agujas del reloj, supuestos portadores positivos. Teniendo en cuenta (5), el módulo del campo eléctrico es

$$\boxed{E = \frac{I B}{2\pi q n L r}}$$

- i) E es el mismo en todos los puntos de una línea de fuerza de radio r . Despreciando la anchura del gap, la tensión Hall V_H será

$$V_H = E 2\pi r = \frac{I B}{2\pi q n L r} 2\pi r \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_H = \frac{I B}{q n L}}$$

P2.-Tabla de respuestas

Apartado	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Puntos
a)	$V_H = v B b$		1,5
b)	Cambiará la polaridad de los bornes A y B de la cinta		0,5
c)	$I = q n a b v$		1
d)	$V_H = \frac{I B}{n q a}$		1
e)		$n = 1,16 \times 10^{29}$ portadores/m ³	1
f)	$v_r = \frac{I}{2 \pi n q L r}$		2
g)	$F_m = \frac{I B}{2 \pi n L r}$		1
h)	$E = \frac{I B}{2 \pi q n L r}$		1
i)	$V_H = \frac{I B}{q n L}$		1

P3.- Una aproximación a las fibras ópticas.

(10 puntos)

Las fibras ópticas han revolucionado el mundo de las telecomunicaciones en las últimas décadas. Su funcionamiento está basado en las leyes de la reflexión y de la refracción (ley de Snell), en particular en el fenómeno de la *reflexión total*. Esquemáticamente (figura 1) una fibra óptica es un fino hilo de material transparente, llamado núcleo, por el que se propaga la luz sufriendo sucesivas reflexiones totales, pues está rodeado por otro material, llamado revestimiento, de menor índice de refracción.

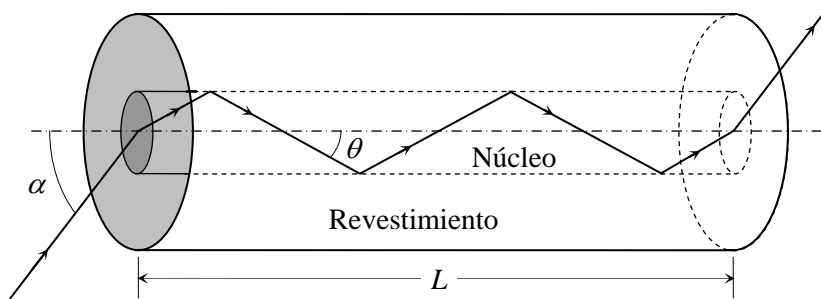


Fig. 1

- a) Si $n_{\text{nuc}} = 1,465$ y $n_{\text{rev}} = 1,460$, determine el máximo ángulo respecto al eje, θ_{max} , con que puede viajar la luz dentro del núcleo para que se produzcan reflexiones totales al alcanzar el revestimiento. ¿A qué ángulo de iluminación, α_{max} , desde el exterior ($n_{\text{aire}} = 1,000$) corresponde esta situación?

Todos los rayos que inciden sobre la entrada del núcleo con $0 \leq \alpha \leq \alpha_{\text{max}}$ se propagarán confinadamente por la fibra, pero siguiendo caminos diferentes, y por tanto tardando tiempos diferentes en alcanzar el extremo de salida. Dato: velocidad de la luz en el vacío, $c = 2,998 \times 10^8$ m/s.

- b) Calcule las longitudes, L_0 y L_{max} recorridas por la luz en los casos extremos $\alpha = 0$ y $\alpha = \alpha_{\text{max}}$, y los tiempos de tránsito correspondientes, t_0 y t_{max} , para una longitud de fibra $L = 1000$ m.

La luz que viaja por la fibra es producida por un LED o un diodo láser que ilumina su entrada en un amplio margen de ángulos de incidencia. La señal a transmitir (por ejemplo una conexión de internet o una conversación telefónica) se codifica digitalmente mediante una rápida sucesión de pulsos de luz, “bits” (figura 2), según un código binario preestablecido, de forma que un sistema detector al final de la fibra pueda reconocer estos pulsos luminosos y descifrar (decodificar) el mensaje que transportan.

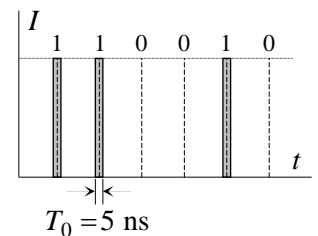


Fig. 2

En el segundo apartado se ha visto que el tiempo de tránsito de la luz por la fibra depende del ángulo de propagación. Este fenómeno, llamado dispersión, es indeseable para los fines prácticos de comunicación digital, pues ensancha los pulsos transmitidos y tiende a superponer dos consecutivos, de forma que el detector puede llegar a no distinguirlos y la información se pierde.

- c) Suponga que los pulsos luminosos que inciden sobre la fibra cubren todo el margen de ángulos de incidencia, entre $\alpha = 0$ y $\alpha = \alpha_{\text{max}}$. Si la duración inicial de los pulsos es $T_0 = 5$ ns, tal como indica la figura 2, calcule la duración total de los pulsos de salida, T .

- d) Calcule la frecuencia máxima de transmisión de los pulsos, f_{max} , para que puedan ser distinguidos por el detector a la salida de la fibra. Para aumentar la capacidad de transmisión del sistema, interesa que esta frecuencia sea lo más alta posible. ¿Cómo modificaría los datos de diseño de la fibra para conseguirlo?

P3.- Solución

Cuando la luz incide desde un medio de índice n hacia otro de índice n' , la ley de Snell establece

$$n \operatorname{sen} \varepsilon = n' \operatorname{sen} \varepsilon' \quad (1)$$

donde ε y ε' son los ángulos de incidencia y refracción, respecto a la normal a ambas superficies. Si $n' < n$, se tendrá que $\operatorname{sen} \varepsilon' > \operatorname{sen} \varepsilon$, y por tanto $\varepsilon' > \varepsilon$ (figura 3). El *ángulo límite* ε_l se define como aquél al que corresponde el máximo ángulo de refracción, $\varepsilon' = \pi/2$ (figura 4), es decir

$$n \operatorname{sen} \varepsilon_l = n' \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_l = \operatorname{arcsen}(n'/n) \quad (2)$$

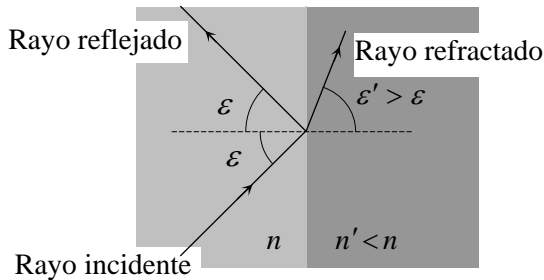


Fig. 3

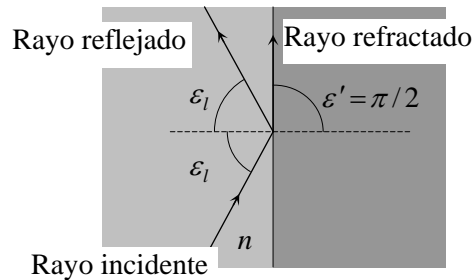


Fig. 4

Para incidencia con ángulo superior al límite, $\varepsilon > \varepsilon_l$, la ecuación (1) no tiene solución real para ε' , pues sería necesario que $\operatorname{sen} \varepsilon' > 1$. En estas circunstancias no existe rayo refractado; toda la energía luminosa se refleja en la superficie de separación entre los dos medios, con ángulo de reflexión igual al de incidencia. Este es el conocido fenómeno de "reflexión total".

a) En nuestro problema, la luz incide desde el núcleo hacia el revestimiento, con

$$n = n_{\text{nuc}} = 1,465 > n' = n_{\text{rev}} = 1,460$$

Por tanto, se producirá reflexión total cuando el ángulo de incidencia sea mayor que el límite, que puede calcularse teniendo en cuenta (2). Se obtiene

$$\varepsilon_l = 85,265^\circ$$

El ángulo que se pide, θ , es el complementario de ε , (figura 5). Para que se produzcan reflexiones totales debe ser

$$\varepsilon > \varepsilon_l = 85,265^\circ \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{\text{max}} = 4,735^\circ}$$

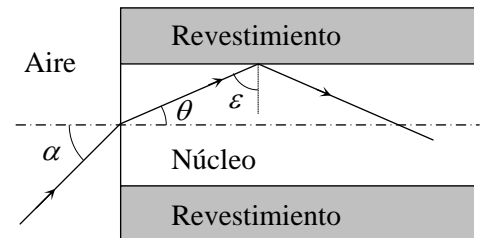


Fig. 5

El ángulo de propagación respecto al eje, θ , es el ángulo de refracción respecto a la entrada de la luz en el núcleo de la fibra, procedente del aire. Como el índice del aire es la unidad, se cumplirá

$$\operatorname{sen} \alpha_{\text{max}} = n_{\text{nuc}} \operatorname{sen} \theta_{\text{max}} = n_{\text{nuc}} \operatorname{cos} \varepsilon_l \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_{\text{max}} = 6,946^\circ}$$

b) Los rayos que inciden desde el aire sobre el núcleo con $\alpha = 0$ viajarán por la fibra con $\theta = 0$, en paralelo al eje y sin sufrir reflexiones totales en el revestimiento. Por tanto han de recorrer una distancia

$$\boxed{L_0 = L = 1000 \text{ m}}$$

La velocidad de propagación de la luz dentro del núcleo es $v = c/n_{\text{nuc}}$, donde $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$ es la velocidad de la luz en el vacío. Por tanto, el tiempo que tardarán los rayos de luz en recorrer la fibra, para $\alpha = 0$, es

$$t_0 = \frac{L_0}{v} = \frac{L n_{\text{nuc}}}{c} \Rightarrow \boxed{t_0 = 4,887 \mu\text{s}}$$

Los rayos que inciden desde el aire sobre el núcleo con $\alpha = \alpha_{\text{max}}$ viajarán por la fibra con $\theta = \theta_{\text{max}}$, de forma que la longitud realmente recorrida es

$$L_{\text{max}} = \frac{L}{\cos \theta_{\text{max}}} = \frac{L}{\sin \varepsilon_l} = \frac{n_{\text{nuc}}}{n_{\text{rev}}} L \Rightarrow \boxed{L_{\text{max}} = 1003,4 \text{ m}}$$

El tiempo de recorrido por la fibra para $\alpha = \alpha_{\text{max}}$ será, por tanto

$$t_{\text{max}} = \frac{L_{\text{max}}}{v} = \frac{L_{\text{max}} n_{\text{nuc}}}{c} = \frac{n_{\text{nuc}}}{n_{\text{rev}}} t_0 \Rightarrow \boxed{t_{\text{max}} = 4,903 \mu\text{s}}$$

- c) Cada pulso de luz es transmitido por la fibra mediante rayos correspondientes a todo el margen de admisión a la entrada, $0 \leq \alpha \leq \alpha_{\text{max}}$, de forma que la luz que ha entrado en la fibra en un cierto instante t llega al final entre $t + t_0$ y $t + t_{\text{max}}$, durante un intervalo de tiempo

$$\Delta t = t_{\text{max}} - t_0 \approx 16 \text{ ns}$$

Como los pulsos tienen una duración inicial $T_0 = 5 \text{ ns}$, a la salida de la fibra serán mucho más anchos, con una duración

$$T = T_0 + \Delta t \Rightarrow \boxed{T \approx 21 \text{ ns}}$$

Además, serán menos intensos, pues la energía inyectada se reparte en un mayor intervalo de tiempo.

- d) La separación temporal mínima entre dos pulsos consecutivos, para que no se solapen en el detector, es precisamente T . Esto corresponde a una frecuencia máxima de transmisión de pulsos

$$f_{\text{max}} = \frac{1}{T} \Rightarrow \boxed{f_{\text{max}} \approx 47 \text{ MHz}}$$

Para aumentar f_{max} es necesario reducir T , o sea Δt .

$$\Delta t = t_{\text{max}} - t_0 = t_0 \left(\frac{n_{\text{nuc}}}{n_{\text{rev}}} - 1 \right) = \frac{L n_{\text{nuc}}}{c n_{\text{rev}}} (n_{\text{nuc}} - n_{\text{rev}})$$

Por tanto, para una L dada, un aumento de la frecuencia f_{max} requiere:

$$\boxed{\text{Reducir la diferencia de índices entre el núcleo y revestimiento, } n_{\text{nuc}} - n_{\text{rev}}}$$

En nuestro problema, $n_{\text{nuc}} - n_{\text{rev}} = 0,005$. Si, por ejemplo, la diferencia fuese $n_{\text{nuc}} - n_{\text{rev}} = 0,001$, Δt se reduciría en un factor 5 y, f_{max} aumentaría a unos 120 MHz.

Nota: En las fibras reales la luz no puede viajar confinada para cualquier ángulo $\theta < \theta_{\text{max}}$, sino sólo para algunos ángulos concretos, correspondientes a los llamados *modos de propagación* de la fibra. Para comprender cualitativamente este fenómeno basta plantearse el problema desde el punto de vista de un observador que viajase en paralelo al eje de la fibra y con la misma velocidad de avance de la luz a lo largo de dicho eje. Este observador vería luz viajando en una trayectoria rectilínea perpendicular al eje y sufriendo repetidas reflexiones en las fronteras núcleo-revestimiento (hacia arriba y hacia abajo en la figura 1). La interferencia de estas ondas sólo sería constructiva cuando se cumpliese una condición de tipo onda estacionaria para la luz en las dimensiones transversales del núcleo. Esta condición conduce a una cuantización de los posibles ángulos de propagación de la luz respecto al eje de la fibra.

P3. Tabla de respuestas

Apartado	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Puntos
a		$\theta_{\max} = 4,735^\circ$ $\alpha_{\max} = 6,946^\circ$	 2 0,5
b		$L_0 = L = 1000 \text{ m}$ $t_0 = 4,887 \mu\text{s}$ $L_{\max} = 1003,4 \text{ m}$ $t_{\max} = 4,903 \mu\text{s}$	 0,5 1,5
c		$T \approx 21 \text{ ns}$	3
d		$f_{\max} \approx 47 \text{ MHz}$ Aumento $f_{\max} \Leftrightarrow$ Reducción $n_{\text{nuc}} - n_{\text{rev}}$	 1 1,5

Objetivo.

Se va a estudiar experimentalmente el proceso de carga de un condensador a través de una resistencia, y se deducirá la capacidad del condensador.

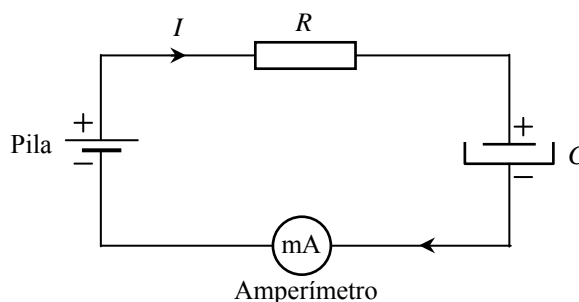
Materiales.

- Condensador electrolítico
- Pila de petaca.
- Resistencia eléctrica.
- Polímetro con dos sondas y dos pinzas de conexión (cocodrilos).
- Dos cables con pinzas.
- Cronómetro.

Modelo teórico.

Un condensador es un dispositivo que sirve para almacenar carga eléctrica. La principal característica de un condensador es su *capacidad*, C , cociente entre la carga que almacena y la diferencia de potencial entre sus terminales.

En este experimento se va a cargar un condensador inicialmente descargado a través de una resistencia, R , alimentando el circuito con una pila eléctrica, como se esquematiza en la figura adjunta. Tras cerrar el circuito, la corriente que circula empieza a cargar el condensador, de forma que aumenta la diferencia de potencial entre sus terminales. Por tanto, la caída de potencial en la resistencia y la corriente que circula por ella van disminuyendo. En concreto, puede demostrarse que la corriente disminuye exponencialmente con el tiempo, t , en la forma



$$I = I_0 e^{-(t/RC)} \tag{1}$$

donde I_0 es la corriente inicial, cuando se cierra el circuito en $t = 0$.

Procedimiento experimental

- 1) Mida con el polímetro el valor de la resistencia R . (1 punto)
- 2) Con los componentes eléctricos de que dispone construya el circuito eléctrico, **dejando inicialmente abierta una de las conexiones a la pila**. Tenga en cuenta que:

- El condensador electrolítico tiene una polaridad eléctrica definida (ver figuras). Si no se respeta esta polaridad, el condensador se estropeará al cerrar el circuito y las medidas no serán correctas.
- El polímetro se usa como miliamperímetro, en la escala de 2 mA. Antes de cerrar el circuito, asegúrese de que las conexiones de este instrumento son correctas.
- El condensador debe estar inicialmente descargado. Para conseguirlo, basta cortocircuitar sus dos terminales con uno de los cables.



- 3) Cierre el circuito y, simultáneamente, ponga en marcha el cronómetro. Anote el valor de la corriente I que circula a intervalos regulares de 10 segundos, hasta un valor máximo de 120 s. La lectura del polímetro no es instantánea, por lo que no debe tener en cuenta para cálculos posteriores la medida en el instante inicial, $I(t = 0)$. Presente las medidas de I en la segunda columna de una tabla como la siguiente. (4 puntos)

t (s)	I ()	
10		
20		
...		
120		

- 4) Transforme la ecuación (1) para obtener una dependencia lineal entre alguna función de I y el tiempo t . Anote en la tercera columna de la tabla anterior los valores de esta función de I . (2 puntos)
- 5) Represente gráficamente en el papel milimetrado los puntos correspondientes a esta dependencia lineal. (2 puntos)
- 6) Determine la pendiente, p , y la ordenada en el origen, c , de la recta que mejor se ajusta a estos puntos. (4 puntos)
- 7) A partir de los valores de p y c obtenidos en 6) y del valor de R medido en 1), determine los valores de la corriente inicial, I_0 , y de la capacidad del condensador, C . (2 puntos)
- 8) Suponga que la principal fuente de error en este experimento es la medida de la corriente I , y que la incertidumbre de cada medida es \pm una unidad en el último dígito presentado en la pantalla del polímetro. Haga una estimación de las incertidumbres de I_0 y de C . (5 puntos)

Solución Prueba experimental.

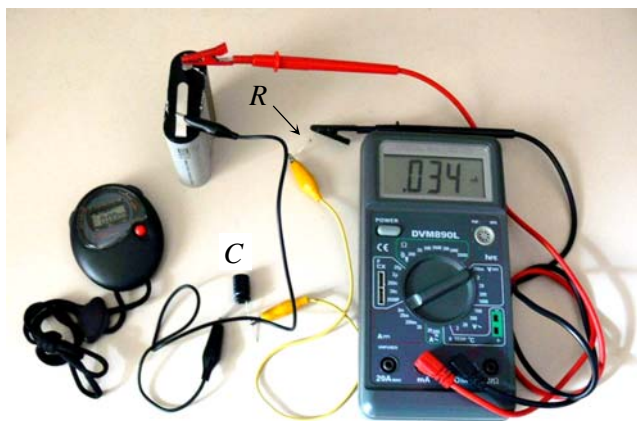
Determinación de la capacidad de un condensador

- 1) El valor nominal de la resistencia es de $100\text{ k}\Omega$, con una tolerancia del $\pm 5\%$. La medida con el polímetro de una resistencia concreta arroja un valor

$$R = 98,6\text{ k}\Omega$$

Midiendo otras resistencias se observa una dispersión aleatoria del orden de $\Delta R = 0,5\text{ k}\Omega$.

- 2) Se presenta una foto del circuito, con los materiales suministrados.

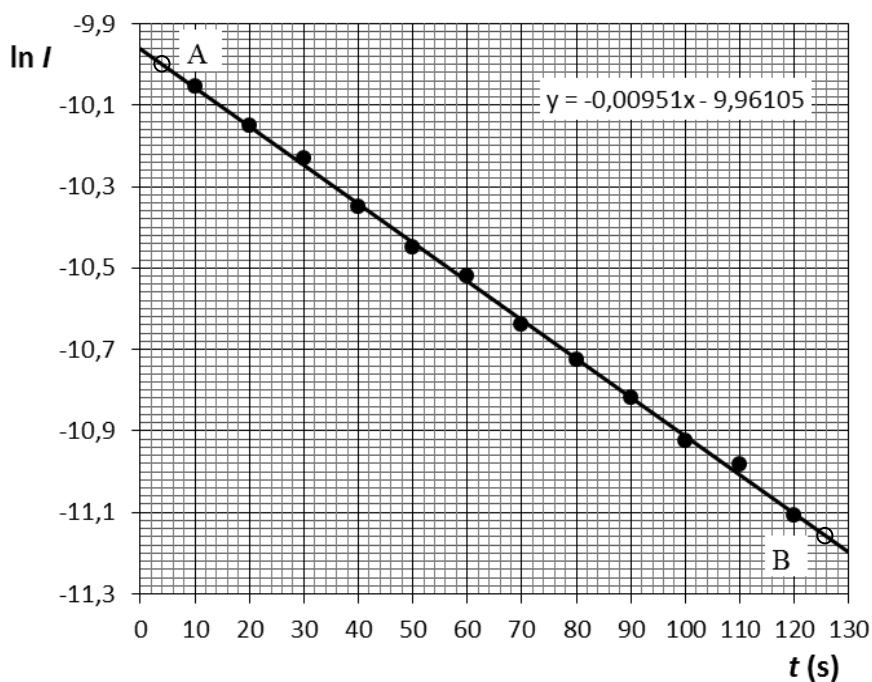


- 3) Tabla de datos:

t (s)	I (μA)	$\ln I$	$\Delta(\ln I)$
10	43	-10,05	0,023
20	39	-10,15	0,026
30	36	-10,23	0,028
40	32	-10,35	0,031
50	29	-10,45	0,034
60	27	-10,52	0,037
70	24	-10,64	0,042
80	22	-10,72	0,045
90	20	-10,82	0,050
100	18	-10,93	0,056
110	17	-10,98	0,059
120	15	-11,11	0,067

- 4) Aplicando logaritmos a la ecuación (1) resulta $\ln I = \ln I_0 - t/RC$, de forma que se espera una dependencia lineal entre $\ln I$ y t , con pendiente $p = -1/RC$ y ordenada en el origen $c = \ln I_0$.

- 5) A continuación se presenta la gráfica pedida, con la recta que mejor se ajusta a los puntos experimentales.



- 6) La pendiente de la recta pueden obtenerse a partir de las coordenadas de dos puntos alejados escogidos sobre la recta, por ejemplo los puntos A y B de la figura anterior.

$$p = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-11,16 - (-10,00)}{(126,0 - 4,0) \text{ s}} = -9,508 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

La ordenada en el origen puede leerse directamente en la gráfica anterior

$$c = -9,96$$

Un ajuste por mínimos cuadrados conduce a los mismos resultados, con tres cifras significativas.

7)
$$C = -\frac{1}{pR} = 1,067 \times 10^{-3} \text{ F} \quad \boxed{C = 1067 \mu\text{F}}$$

La capacidad nominal del condensador es 1000 μF , con una tolerancia del $\pm 20\%$.

$$I_0 = e^c = 4,73 \times 10^{-5} \text{ A} \quad \boxed{I_0 = 47,3 \mu\text{A}}$$

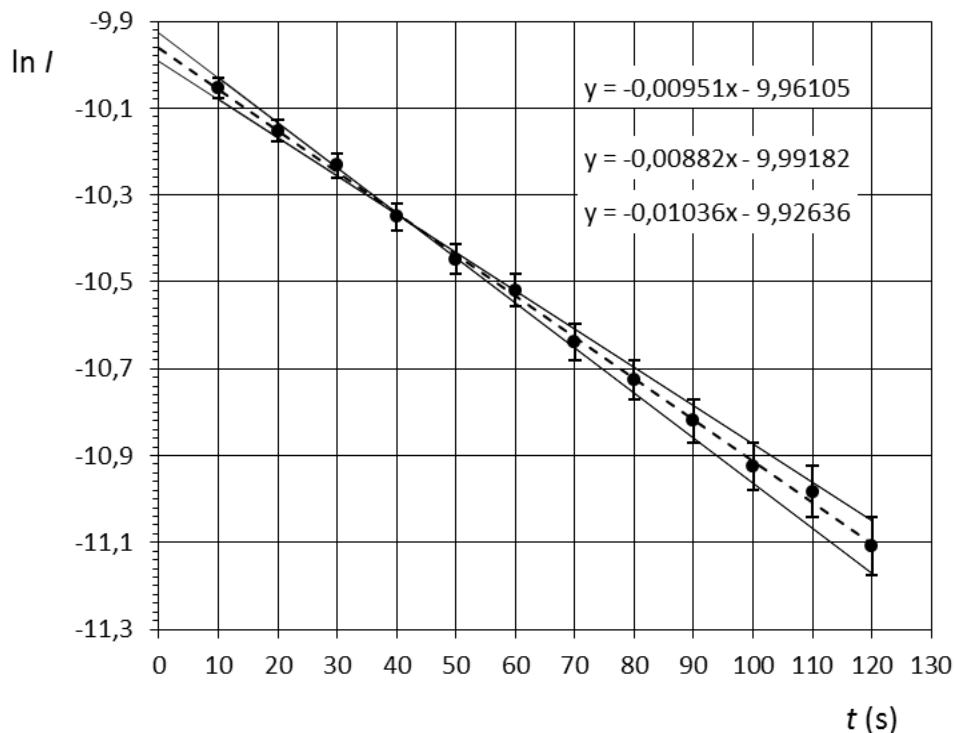
- 8) Según se indica en el enunciado, la precisión del amperímetro es una unidad en el último dígito. Se trabaja en la escala de 2 mA y se presentan lecturas con tres decimales, de forma que la incertidumbre de la medida de la corriente es $\Delta I = 1 \mu\text{A}$.

La incertidumbre transmitida al logaritmo de la intensidad es

$$\Delta(\ln I) = \frac{\Delta I}{I}$$

Los valores numéricos de $\Delta(\ln I)$ se recogen en la cuarta columna de la tabla de datos.

En la siguiente gráfica se representan los puntos experimentales con las barras de error correspondientes, y las rectas que, con pendientes máxima y mínima, se ajustan razonablemente a estos puntos (supuestos errores aleatorios). En la misma gráfica se indican los datos de estas rectas



La incertidumbre de la pendiente es

$$\Delta p = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2} = \frac{-0,00882 - (-0,01036)}{2} \text{ s}^{-1} = 7,7 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

La incertidumbre transmitida a la capacidad puede calcularse numéricamente, a partir de los valores máximo y mínimo de p que permiten calcular, respectivamente, los valores mínimo y máximo de C . De una forma más directa puede calcularse teniendo en cuenta que en un producto (o cociente) se transmite la incertidumbre relativa (puede demostrarse inmediatamente tomando incrementos, en valor absoluto, en la expresión de partida)

$$C = \frac{1}{pR} \Rightarrow \frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta p}{p} \Rightarrow \Delta C = 8,6 \times 10^{-5} \text{ F}$$

Expresando la incertidumbre con una única significativa, el resultado final del experimento sería

$$C = (107 \pm 9) \times 10^{-5} \text{ F}$$

En cuanto a la incertidumbre de la corriente inicial, debe obtenerse a partir de la incertidumbre de la ordenada en el origen de la recta ajustada. Sus valores máximo y mínimo estimados pueden leerse directamente en la gráfica (u obtenerse mediante ajuste), de forma que

$$\Delta c = \frac{-9,93 - (-9,99)}{2} = 0,03$$

De nuevo, la incertidumbre transmitida puede calcularse numéricamente, o tomando incrementos en la expresión que relaciona I_0 con c .

$$I_0 = e^c \Rightarrow \Delta I_0 = e^c \Delta c = I_0 \Delta c = 1,4 \mu\text{A}$$

En total: $I_0 = (47,3 \pm 1,4) \mu\text{A}$