5 Radiografía del cubo

Por Vicente MEAVILLA SEGUI *

Desde que la matemática comenzó su titubeante andadura hasta nuestros días ha llovido mucho (en efecto).

Indudablemente, el paso de los años ha dejado sentir su influencia en el avance de esta disciplina, relegando a segundo término (en el mejor de los casos) capítulos enteros que antaño eran los pilares sobre los que descansaba todo el peso de esta ciencia.

Resulta claro que en el presente siglo la algebrización de la matemática ha constituido un éxito notable al unificar su contenido. Sin embargo, y esto también es claro, esta unidad ha servido (desgraciadamente) para que en los cursos elementales de nuestro BUP se desconozcan, aunque parezca inverosímil, nociones que no hace mucho resultaban familiares a cualquier estudiante medianamente dotado.

En las líneas que siguen nos proponemos revitalizar uno de los muchos temas, olvidados en la actual didáctica.

Dedicamos este modesto artículo a todos aquellos que, como nosotros, estén convencidos de la insuficiencia pedagógica de los programas vigentes, advirtiendo que la lectura de este trabajo puede resultar aburrida (al tocar una cuestión ya caduca) para todos los que opinen que siguiendo las directrices modernas llevaremos a buen puerto la nave en la que todos los enseñantes estamos embarcados.

Sin más, iniciamos nuestro estudio.

Consideremos dos planos paralelos P y P' y designemos por l la distancia entre ambos.

Sobre P dibujemos el cuadrado ABCD, de lado l, y proyectemos ortogonalmente sobre P' los puntos A, B, C y D. Obtendremos, de esta forma, el cuadrado A'B'C'D' contenido en el plano P' (figura 1).

Evidentemente, los cuadriláteros ADD'A', DCC'D', CC'B'B y BB'A'A son cuadrados (de lado l). Estamos, pues, en presencia de un poliedro regular convexo (el ABCDD'C'B'A') llamado CUBO.

— Los puntos: A, B, C, D, D', C', B' y A' son los *vértices* del cubo.

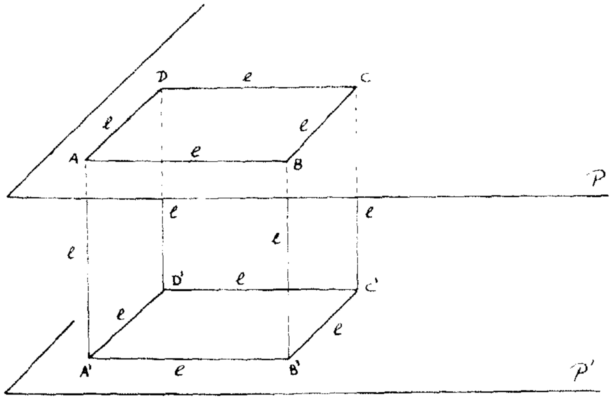

Figura 1

— Los segmentos: AD, DC, CB, BA, AA', DD', CC', BB', A'D', D'C', C'B' y B'A' son las *aristas* del cubo.

— Los cuadrados: ABCD, A'B'C'D', ADD'A', DCC'D', CC'B'B y BB'A'A son las *caras* del cubo.

— Los segmentos que unen los vértices del cubo no pertenecientes a una misma cara se denominan *diagonales*.

Llamando N_v, N_a y N_c al número de vértices, aristas y caras del cubo se tiene, ciertamente, la siguiente igualdad:

$$N_c + N_v - N_a = 2$$

cuya generalización a cualquier poliedro regular convexo constituye el teorema de Euler.

Nos proponemos, a continuación, comprobar que las cuatro diagonales de un cubo concurren en un punto (al que se llama *centro)*.

Para ello nos ayudaremos de la figura 2.

Observemos que las diagonales de los rectángulos AA'C'C y B'BDD' son las diagonales del cubo ABCDD'C'B'A' (al que a partir de aquí designaremos por W, para abreviar la escritura). Sea O el punto de intersección de las dos diagonales del rectángulo AA'C'C. Evidentemente, O pertenece a la recta intersección de los planos que contienen a los dos rectángulos considerados.

Teniendo en cuenta, además, que dichos planos son perpendiculares, resulta inmediato que efectuando un giro alrededor de su recta de intersección y amplitud 90°, el rectángulo AA'C'C se transforma en el B'BDD'.

Con esto, las diagonales del rectángulo B'BDD' también se cortan en O. Por tanto, las diagonales de W concurren el punto O.

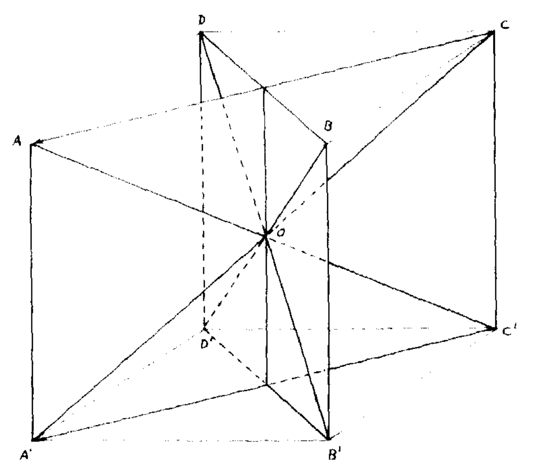

Figura 2

(*) Profesor Agregado de Matemáticas del IB «San Miguel de Aralar» de Alsasua (Navarra).

Calculemos ahora la distancia (expresada en función de la arista del cubo) de O a cada uno de los vértices de W.

Notemos que al ser O el centro de dos rectángulos iguales, cuyos vértices son los vértices de W, el centro de W equidistará de los ocho vértices del cubo.

Consideremos el triángulo rectángulo (en A′) AA′C′ (figura 3).

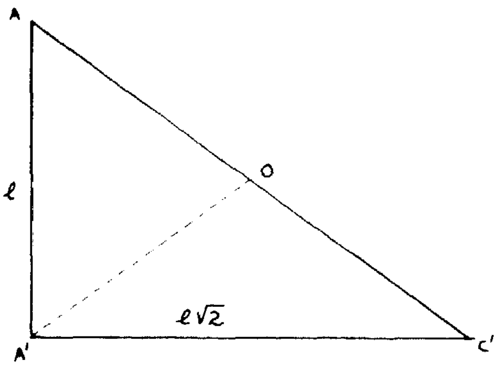

Figura 3

Aplicando el teorema de Pitágoras obtendremos, de inmediato, la longitud de la diagonal AC′. A saber:

$$AC' = l\sqrt{3}$$

De donde deducimos que:

$$OA = OB = OC = OD = OA' = OB' = OC' = OD' = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

A partir de estos resultados, podemos afirmar:

Existe una esfera de centro O (centro del cubo W) *y radio* $R = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ *circunscrita a W.*

Antes de seguir adelante en nuestro estudio vamos a dar una nueva definición:

— Llamaremos planos diagonales de un cubo a los planos determinados por dos cualesquiera de sus diagonales (figura 4).

Hagamos notar que en la figura 4 no están representados los planos diagonales (lo que realmente hemos dibujado han sido sus intersecciones con el cubo).

Es evidente que los seis planos diagonales son planos de simetría del cubo. Además de ellos, cualquier cubo admite tres nuevos planos de simetría cuyas intersecciones con el poliedro están reflejadas en la figura 5.

Continuando con nuestro análisis sean P, Q, R, S, T y U los centros de las caras ADD′A′, ABB′A′, BCC′B′, DCC′D′, ABCD y A′B′C′D′ del cubo W.

Uniendo dichos puntos obtenemos el poliedro PQRSTU de la figura 6.

Las caras del sólido así engendrado son triángulos y su número coincide con el de vértices de W. Por otro lado, el número de aristas de los dos poliedros es el mismo.

¿Podemos afirmar algo más sobre la naturaleza de las caras del poliedro PQRSTU?

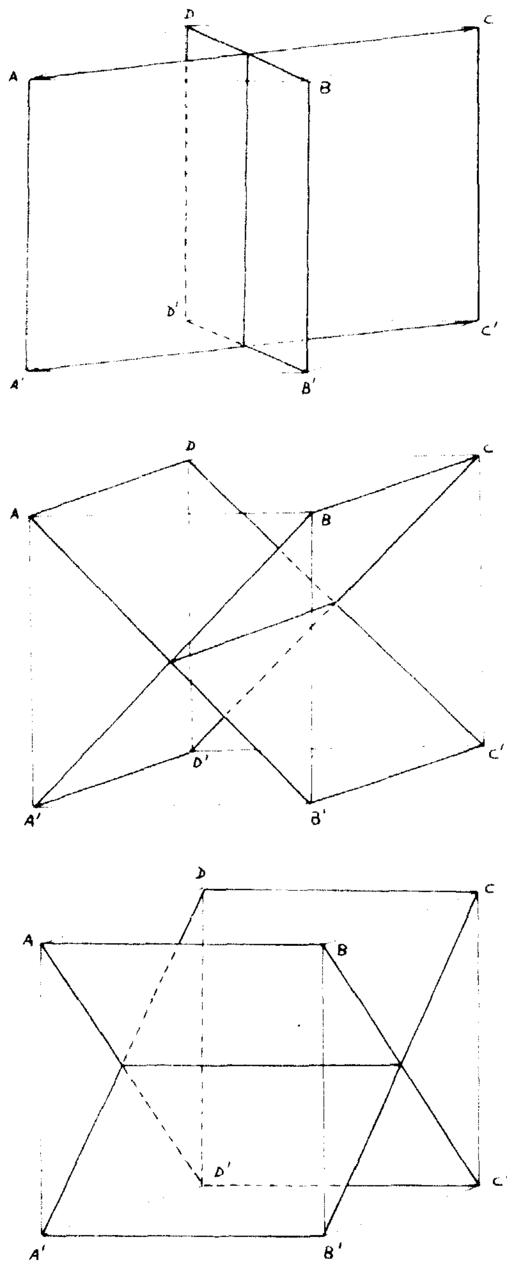

Figura 4

Ciertamente. Observemos que, en la figura 5, los puntos P, U, R y T son los puntos medios de los lados del cuadrado XYZL; en consecuencia, los segmentos PT, TR, RU y UP tienen la misma longitud.

Efectuando un giro de eje r (siendo r la recta determinada por los puntos T y U) y amplitud 90°, el cuadrado XYZL se transforma en el cuadrado MNHJ; por tanto, los segmentos QT, TS, SU y UQ tienen, también, la misma longitud.

De forma similar podría probarse que las longitudes de los segementos PQ, QR, RS y SP coinciden.

En definitiva, tenemos que:

Todas las aristas del poliedro PQRSTU tienen la misma longitud.

Dicho en otras palabras:

Todas las caras del poliedro PQRSTU son triángulos equiláteros.

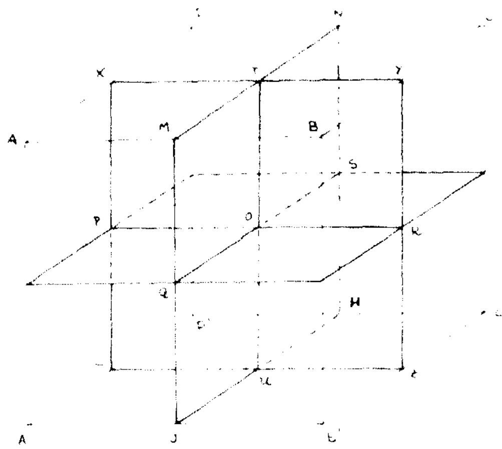

Figura 5

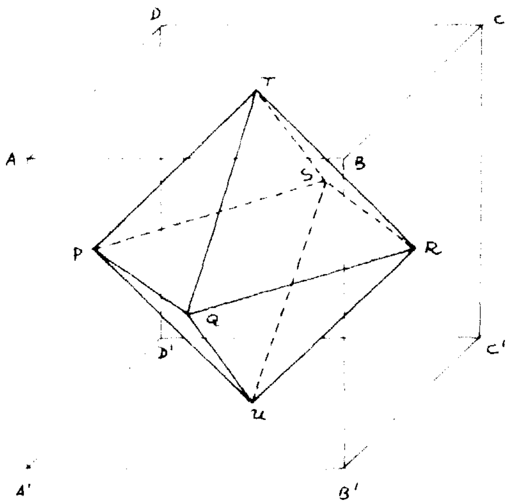

Figura 6

Resumiendo:

El sólido obtenido al unir los centros de las caras de W es un poliedro regular convexo, al que se llama OCTAEDRO.

Dada la forma peculiar en la que ha sido obtenido dicho octaedro decimos que W y PQRSTU son *conjugados.*

Nos disponemos, acto seguido, a demostrar que la diagonal AC' de W corta al triángulo equilátero PQT (cara del octaedro conjugado de W) en su baricentro.

En primer lugar, notemos que tanto T como el punto medio del segmento PQ pertenecen al plano diagonal que contiene al rectángulo de vértices A, A', C' y C. (Esta afirmación resulta trivial teniendo presente que los planos diagonales de un cubo son planos de simetría.) Por tanto, el baricentro de PQT pertenece al citado plano.

En segundo lugar, designando por V el baricentro de PQT, los puntos T, A' y V están alineados. Dicha aseveración resulta evidente teniendo en cuenta que el triángulo PQT se obtiene al unir los puntos medios de los lados del triángulo (equilátero) A'BD.

En la figura 7 (a)–(b), V' representa el punto de intersección de la diagonal AC' con el triángulo PQT; el punto medio del segmento PQ ha sido denotado por E.

Observemos, figura 7-(b), que los triángulos ATV' y OEV' son semejantes (al tener los tres ángulos iguales).

Podemos establecer, entonces, la siguiente proporción:

$$\frac{AT}{TV'} = \frac{OE}{EV'}$$

De donde, recordando que: $AT = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $OE = \frac{\sqrt{2}}{4}$, resulta: $EV' = \frac{TV'}{2}$

Por tanto, tenemos:

$$EV' = \frac{1}{3}\, TE$$

Con lo cual V' es el baricentro de PQT (es decir: V = V').

Para finalizar nuestro artículo, veamos que la dia-

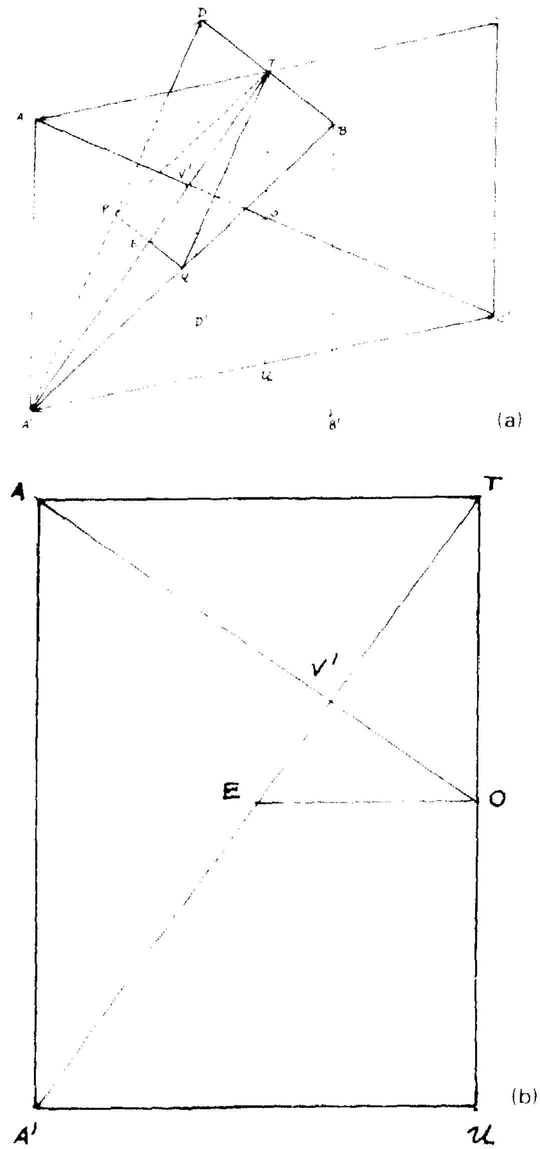

Figura 7

gonal AC' corta a PQT perpendicularmente. Bastará, para ello, que comprobemos:

1) AC' es perpendicular a A'T.

2) AC' es perpendicular a PB.

Los triángulos AA'U y ATV', de la figura 8, tienen un ángulo igual, a saber: $\sphericalangle$ ATV' = $\sphericalangle$ AUA'.

Teniendo en cuenta que:

$$AU = \sqrt{l^2 + \frac{2l^2}{4}} = \frac{l\sqrt{6}}{2}$$

$$AT = \frac{l\sqrt{2}}{2}$$

$$A'U = \frac{l\sqrt{2}}{2}$$

$$TV' = \frac{2}{3}\, TE = \frac{2}{3}\, \frac{l\sqrt{6}}{4} = \frac{l\sqrt{6}}{6}$$

resulta:

$$\frac{AU}{A'U} = \frac{AT}{V'T} = \sqrt{3}$$

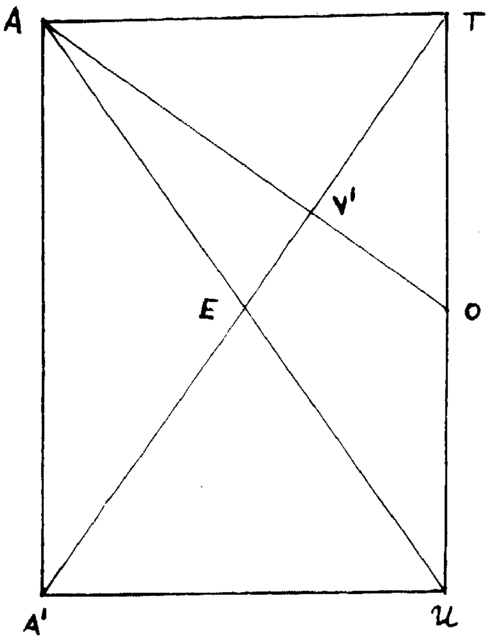

Figura 8

Con esto podemos afirmar:

Los triángulos AA'U y ATV' son tales que:

— Tienen un ángulo igual.

— Los lados que lo determinan son proporcionales.

Luego:

Los triángulos considerados son semejantes.

Por tanto:

$$\sphericalangle AA'U = \sphericalangle AV'T = 90^\circ$$

En definitiva:

AC' es perpendicular a A'T.

Demostraremos, a continuación, que AC' es perpendicular a PB.

Consideremos, para ello, la figura 9 en la que está representada la intersección del plano diagonal, que contiene al rectángulo ABC'D', con el cubo W.

En los triángulos ABV' y BD'C' se satisface la igualdad:

$$\sphericalangle BAV' = \sphericalangle BD'C'$$

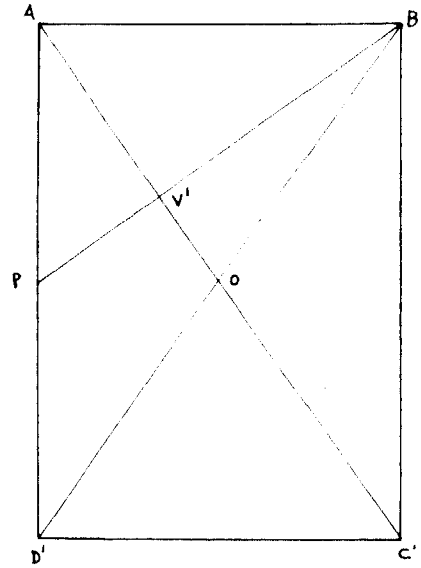

Figura 9

Además:

$$BD' = \sqrt{2l^2 + l^2} = l\sqrt{3}$$

$$AB = l$$

$$D'C' = l$$

$$AV' = \frac{2}{3}\, AO = \frac{2}{3}\, \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{3}$$

Desde aquí podemos deducir, fácilmente, que:

$$\frac{BD'}{AB} = \frac{D'C'}{AV'} = \sqrt{3}$$

Entonces, y aplicando un razonamiento análogo al utilizado antes, deducimos que los triángulos ABV' y BD'C' son semejantes. Luego:

$$\sphericalangle AV'B = \sphericalangle D'C'B = 90^\circ$$

En resumen:

— *AC' es perpendicular a PB.*

Es obvio que los siguientes enunciados son también ciertos:

— La diagonal AC' corta perpendicularmente al triángulo RSU en su baricentro.

— La diagonal A'C corta perpendicularmente a los triángulos PQU y STR en sus respectivos baricentros.

— La diagonal DB' corta perpendicularmente a los triángulos PTS y QRU en sus respectivos baricentros.

— La diagonal BD' corta perpendicularmente a los triángulos TQR y PSU en sus respectivos baricentros.