LA ALGEBRIZACIÓN DE LOS PROGRAMAS DE CÁLCULO ARITMÉTICO Y LA INTRODUCCIÓN DEL ÁLGEBRA EN SECUNDARIA

Ruiz, N. (1), **Bosch, M.** (2), **Gascón, J.** (1)

Universidad Autónoma de Barcelona (1), *Universidad Ramon Llull* (2)

Resumen

El trabajo que presentamos se sitúa dentro del marco teórico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Se propone un modelo epistemológico de referencia útil para fundamentar la génesis escolar del álgebra considerada como instrumento de modelización, a partir del esbozo de tres etapas del proceso de modelización algebraica.

Abstract

This paper is situated in the framework of the Anthropologic Theory of the Didactic (ATD). It proposes a reference epistemological model to provide a basis for the school genesis of algebra as a modelling tool, through the progressive development of the three stages of the modelling algebraic process.

Palabras clave: enseñanza del álgebra, educación secundaria, Teoría antropológica de lo didáctico.

Key words: secondary school, teaching of algebra, Anthropological Theory of the Didactic.

Ruiz, N., Bosch, M., Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 545-556). Lleida: SEIEM.

Algunas consecuencias de la aritmetización escolar del álgebra

El trabajo que vamos a presentar se fundamenta en las conclusiones expuestas por Pilar Bolea (2002) en su tesis doctoral. En ella la autora muestra en qué sentido la institución escolar interpreta generalmente el álgebra elemental como una aritmética generalizada, es decir, identifica el álgebra escolar con el uso del simbolismo o "lenguaje algebraico" y lo opone a un supuesto "lenguaje aritmético".

En Bolea et al. (2004) se muestra que una de las consecuencias de la interpretación del álgebra escolar como aritmética generalizada es la ausencia del álgebra como instrumento de modelización en las matemáticas que se estudian en la Educación Secundaria Obligatoria. Trabajos posteriores en el ámbito de la TAD han mostrado las conexiones de este fenómeno con la *incompletitud* de las OM de Secundaria (Fonseca, 2004) y con el fenómeno de la desarticulación de la matemática escolar (García, 2005). También se ha constatado que la ausencia del uso del instrumento algebraico en la ESO dificulta enormemente el desarrollo de la modelización algebraico-funcional en el tránsito de la ESO al Bachillerato (Ruiz-Munzón, 2006), lo que obstaculiza la emergencia de las cuestiones problemáticas que podrían dar sentido al uso de funciones y al cálculo diferencial.

Los trabajos citados muestran la importancia didáctica del carácter *prealgebraico* de las matemáticas que se estudian en Secundaria y el alcance de los fenómenos didácticos relacionados con la aritmetización del álgebra escolar[1] Aparece por tanto el problema didáctico de cómo realizar la *introducción del álgebra* de manera *funcional* esto es; como un *instrumento de modelización*.

Desde la Teoría antropológica de lo didáctico (TAD) se postula que el álgebra debe interpretarse como un instrumento genérico de modelización de praxeologías u organizaciones matemáticas (en adelante OM). En particular, el álgebra escolar, antes de ser tematizada como objeto explícito de enseñanza, debe utilizarse para profundizar el estudio de determinadas OM previamente construidas. Para ello proponemos un modelo epistemológico de referencia (MER)[2] que sustenta la génesis, y el posterior desarrollo del proceso de modelización algebraica durante la enseñanza secundaria. Este modelo distingue diferentes etapas del proceso de algebrización que describiremos y ejemplificaremos aquí. La propuesta didáctica que concreta una posible implementación de esta génesis y desarrollo forma parte de una investigación en curso que no describiremos en este trabajo.

[1] En García (2007) puede consultarse una síntesis de los trabajos de la TAD en el ámbito del álgebra escolar.

[2] La descripción del MER de una actividad matemática se realiza en términos de OM (Sierra, 2006).

Un MER para sustentar el proceso de algebrización

Partiremos de la noción clásica de “problema aritmético” considerando aquellos problemas que pueden resolverse mediante una cadena de operaciones aritméticas (+, –, ×, /, etc.) ejecutables a partir de los datos del problema, datos que acostumbran a ser cantidades conocidas de ciertas magnitudes. Las técnicas clásicas de resolución recurren a discursos verbales y operaciones aritméticas para calcular la cantidad incógnita. Siguiendo la propuesta de Yves Chevallard (2005), a dicho proceso de resolución o cadena estructurada y jerarquizada de operaciones aritméticas lo denominaremos *Programa de Cálculo Aritmético* (PCA, para abreviar).

Para fundamentar la génesis escolar *funcional* del álgebra entendida como herramienta de modelización, tomaremos como sistema inicial a modelizar una OM en torno a los “problemas aritméticos” escolares. Utilizaremos para ejemplificar el proceso un tipo de problemas aritméticos especialmente sencillos, con las ventajas e inconvenientes que provoca el empleo de ejemplos presuntamente “genéricos”. Provocaremos la emergencia de cuestiones que muestran la necesidad de considerar y tratar las *técnicas o procesos de resolución* como objetos de estudio en sí mismos. Éste es también, uno de los fundamentos de las propuestas de enseñanza desde el movimiento *Early-Algebra* (Molina, 2009).

Esta objetivación del proceso de resolución de un problema aritmético constituye precisamente la primera función (y no la menos importante) de la noción de PCA. Tal como indica Chevallard (2005), los PCA aparecen y se ejecutan en el trabajo matemático de los alumnos desde los inicios de la enseñanza primaria, pero nunca se plantean cuestiones sobre su descripción, justificación o alcance. Dicho en otros términos, los PCA forman parte de la práctica matemática escolar, pero son objetos no matematizados o *paramatemáticos*. Un ejemplo prototípico de problema aritmético es el siguiente:

> **P0***: Gabriel piensa un número, le suma 25, divide el resultado entre 2, resta 8 y lo multiplica todo por 3. Si al final obtiene 21, ¿qué número pensó Gabriel?*

La resolución aritmética (genuinamente verbal) sería: “Si al final obtiene 21, antes de multiplicar por 3 tenía 7, antes de restarle 8 tenía 15, antes de dividir entre 2 tenía 30 y antes de sumar 25 tenía 5. Luego Gabriel pensó el número 5”.

Podemos suponer que el problema anterior forma parte de las tareas que componen cierta OM que tomamos como sistema inicial y que denominamos S:

S = OM en torno a problemas aritméticos + ejecución de PCA (en forma retórica) + Patrón de Análisis-Síntesis[3]

Veremos que en S (y en los sucesivos modelos de S) surgirán cuestiones de naturaleza teórica, esto es, cuestiones relativas al *porqué* se obtiene el tipo de resultado que se obtiene, a la *interpretación* de estos resultados, a las *condiciones* que se requieren (en términos de relaciones entre los datos) para que un tipo de problemas tenga solución o ésta sea única, etc. Este tipo de cuestionamiento provocará la necesidad de ampliar el sistema inicial mediante progresivas modelizaciones, ampliación que caracterizaremos a continuación.

Primera etapa del proceso de algebrización

Identificamos la primera etapa del proceso de algebrización con el momento en que es necesario considerar el PCA como un todo, es decir, producir una *formulación escrita*[4] (simbólica) del PCA, que ya es, en cierto sentido, una *expresión algebraica*. Aparece entonces la necesidad de construir nuevas técnicas, esencialmente de "simplificación", para trabajar sobre las expresiones algebraicas.

Definiremos *expresión algebraica* como la formulación simbólica de un PCA que, en general, podremos utilizar para modelizar tanto el proceso de resolución de un problema aritmético como su *estructura*. Por "simplificar un PCA" se entiende la operación de transformarlo en otro *equivalente*[5] y que, en cierto sentido, sea más "sencillo" o más "adaptado" para utilizarlo en una actividad matemática concreta. Para ello, se introducen símbolos de naturaleza puramente formal (m, ♥, x, ☺) que

---

[3] El Patrón clásico de Análisis-Síntesis constituye la técnica de resolución por excelencia de los problemas aritméticos (Gascón, 1993), entonces *un PCA también puede considerarse como la Síntesis de la resolución* (*inicialmente oral*) de una cierta clase de problemas aritméticos.

[4] Explicitando su estructura de forma global y, por lo tanto, tomando en consideración la jerarquía de las operaciones, las reglas del uso de paréntesis y las propiedades de las relaciones entre ellas (elementos tecnológicos).

[5] Dado un cierto dominio numérico **D**, se dice que dos PCA con argumentos $n_i \in \mathbf{D}$, $P(n_1,\ldots, n_k)$ y $Q(n_1,\ldots, n_k)$ son *equivalentes en* D $\Leftrightarrow P(n_1,\ldots, n_k) = Q(n_1,\ldots, n_k)\ \forall n_i \in \mathbf{D}$. Denotaremos esta relación mediante el símbolo $\equiv$ haciendo abstracción del dominio **D** en el que ambos PCA toman el mismo valor numérico (siempre que esto no produzca confusión).

permiten identificar y explicitar los argumentos del PCA y cuyo ámbito numérico debe delimitarse.

Veamos como una pequeña modificación en la elección de los datos y la incógnita del problema **P0** puede dar lugar a una tarea que se sitúa fuera de S, dado que requiere la explicitación del proceso de resolución. Este trabajo ya se ubica en lo que consideramos la primera etapa del proceso de algebrización:

> **P1a**: *Piensa un número, súmale el doble de su consecutivo, suma 15 al resultado y, por último, resta el triple del número pensado inicialmente. ¿Qué resultado has obtenido? Repite el proceso con otro número diferente ¿Se obtiene siempre el mismo número? ¿Por qué?*

Este problema se puede representar mediante el PCA:

$$\text{PCA}(a, b, c, d) := a + b(a + 1) + c - d \cdot a$$

En el caso en que b = 2, c = 15, d = 3 y a es el número pensado. Por ejemplo, si a = 49, se obtiene: PCA (49, 2, 15, 3):= 49 + 2·50 + 15 – 3·49 ≡ 17. Si se toma a = 10, se obtiene: PCA (10, 2, 15, 3):= 10 + 2·11 + 15 – 3·10 ≡ 17.

En este PCA, la variable a actúa como parámetro y la incógnita del problema planteado corresponde al resultado obtenido al ejecutar el PCA.

La resolución aritmética del problema, es decir la ejecución del PCA indicado, proporciona siempre el mismo resultado numérico (17), independientemente del número pensado inicialmente a. Aparece, por tanto, una cuestión tecnológica (“¿Siempre se obtiene el mismo resultado independientemente del número pensado? ¿Por qué?”) que no se puede responder fácilmente con las técnicas aritméticas de la OM inicial[6]. Para responder a este tipo de cuestiones se requiere traducir la formulación retórica del PCA a su formulación escrita en línea y su posterior simplificación:

$$\text{PCA}(a, 2, 15, 3) := a + 2(a + 1) + 15 - 3a \equiv a + 2a + 2 + 15 - 3a \equiv 17.$$

Esta operación justifica que el resultado obtenido al ejecutar el PCA propuesto en P1a no depende del número inicial.

Denotaremos por **M1** la OM en la que se lleva a cabo esta primera etapa del proceso de algebrización y que constituye una primera ampliación de S.

---

[6] Aunque es cierto que la simplificación puede hacerse oralmente en casos sencillos como el que aquí presentamos, es fácil complicar el PCA para hacer que la técnica oral de simplificación sea impracticable.

$S \subset M_1$: Problemas representables por un PCA escrito P(x, a1,…, ak) que contiene un símbolo no numérico x (parámetro) + técnicas de simplificación de expresiones algebraicas.

Los elementos justificativos de esta OM se ven ampliados puesto que, para justificar la nueva práctica matemática, no basta con las propiedades de las operaciones aritméticas entre cantidades de magnitudes. En particular, aparece la necesidad de ampliar el significado de los signos "+" y "–" para considerarlos no solamente como signos operativos sino también como signos predicativos (Cid, 2001).

Veamos otro ejemplo de problema situado en M1 (y fuera de S):

P1b: *Noelia y Marga piensan, independientemente, sendos números. Noelia multiplica su número por 3, resta 18 y acaba dividiendo este resultado entre 9. Marga resta 4 al número que pensó, a continuación multiplica el resultado por 5 y acaba dividiendo el resultado por 10. Si, casualmente, obtienen el mismo resultado final, ¿qué relación hay entre los números pensados por Noelia y Marga?*

Si denotamos por n el número pensado por Noelia y por m el pensado por Marga, los resultados obtenidos después de aplicar los respectivos PCA son:

$$\mathrm{PCA}(n, 3, 18, 9) = \frac{n \cdot 3 - 18}{9} \equiv \frac{n}{3} - 2 \quad \text{y} \quad \mathrm{PCA}(m, 4, 5, 10) := \frac{(m-4) \cdot 5}{10} \equiv \frac{m}{2} - 2.$$

Igualando los dos PCA ya simplificados se obtiene n/3 = m/2, es decir, $n = \frac{3}{2}m$: el número pensado por Noelia es tres medios del número que pensó Marga.

Los ejemplos considerados, **P1a** y **P1b**, ponen en evidencia dos tipos particulares de cuestiones no resolubles en S que motivan el acceso a la primera etapa del proceso de algebrización. Se puede plantear otro tipo de cuestiones cuya respuesta requiera ampliar explícitamente el ámbito numérico subyacente a los problemas aritméticos considerados, comportando por ejemplo, la introducción de los números negativos (Cid y Bolea, 2010).

En *P0* los argumentos de los que depende el PCA son datos numéricos conocidos y el dato desconocido es una cantidad. En cambio en **P1a** y **P1b** no todos los datos son numéricos (algunos son relaciones) y, además, la incógnita tampoco es un resultado numérico. Ésta es, esencialmente, la *caracterización de los problemas que se sitúan en la primera etapa del proceso de algebrización*.

En esta primera etapa podemos situar también aquellos problemas cuya resolución requiere resolver una *ecuación de primer grado donde la incógnita aparece únicamente en uno de los miembros*. Aquí, el significado de la noción de ecuación es el usual y puede expresarse como la igualdad entre dos PCA que contienen (al menos uno de ellos) una o más incógnitas.

Denotamos por **M1’** la OM que contiene este tipo de problemas y que está incluida en **M1**. Veamos un ejemplo en los que la resolución consiste en aplicar la técnica inversa precedida por la técnica de simplificación:

> **P1b’**: *Si en el problema* **P1b** *añadimos la información que Noelia pensó el número 9. ¿Qué número pensó Marga?*

Usando la respuesta dada en P1b se obtiene:

$$3m/2 = 9;$$

$$m = 6$$

Marga pensó el 6.

Puntualizamos que en **M1** no existe propiamente una técnica general de resolución de ecuaciones pero sí es posible, como hemos visto, realizar la resolución de ciertas ecuaciones muy estereotipadas, caracterizadas por no tener que “manipular la incógnita” porque ésta aparece únicamente en uno de los miembros de la ecuación (Filloy et al., 2008).

Segunda etapa del proceso de algebrización

El paso a la segunda etapa del proceso de algebrización se identifica con la necesidad de igualar dos PCA. Se requiere de nuevas técnicas, las técnicas de cancelación, puesto que hay que manipular una igualdad de dos PCA como un nuevo objeto matemático (ecuación). Dichas técnicas tienen por objeto obtener “ecuaciones equivalentes” y no sólo PCA equivalentes como pasaba con las técnicas de simplificación características de **M1**. Aparece así un segundo modelo **M2** que, además de aumentar el nivel de algebrización, amplía y completa **M1**:

$M_1 \subset M_2$: Problemas representables por una igualdad entre dos PCA con los mismos argumentos no numéricos: P (x1, x2, a1,…, ak) = Q (x1, x2, b1,…, bs) + técnicas de cancelación

Veamos un problema que se sitúa plenamente en **M2**:

> **P2**: *Judit piensa dos números positivos n y m. Al triple de n le resta la diferencia entre m y n. Ahora a m le suma n, le suma el triple de m y finalmente suma 2 al resultado. Si el resultado de las dos secuencias de operaciones coincide ¿Qué relación existe entre n y m?*

El primer cálculo que hace Judit se puede escribir como:

PCA1(n, 3, m):= $3n - |m - n|$;

Y el segundo como:

PCA2 (m, n, 3, 2):= $m + n + 3m + 2 \equiv 4m + n + 2$;

En este caso, no conocemos el resultado numérico de ejecutar cada uno de los PCA, pero si podemos expresar la condición del problema como una igualdad entre dos PCA:

$3n - |m - n| = 4m + n + 2$;

Aplicando las técnicas de cancelación se obtiene:

$3n - |m - n| + |m - n| - 2 - 4m - n = 4m + n + 2 + |m - n| - 2 - 4m - n;$

$|m - n| = 2n - 4m - 2;$

Acabamos de encontrar una relación entre las variables m y n.

En esta etapa se empiezan a construir las técnicas ecuacionales que modifican el uso de los signos y, en particular, del signo “=”, entendido en aritmética como indicador para ejecutar una acción y que pasa ahora a representar también una igualdad entre los resultados de dos PCA.

A continuación describiremos una OM incluida en **M2**, la denominaremos **M2'** y tiene la misma relación con **M2** que **M1’** tenía con **M1**. Se trata de la OM que contiene las tareas resolubles con una ecuación de una única incógnita, por ejemplo:

> **P2’**: *Si en el problema* **P2** *añadimos la información que n es el cuádruple de m menos 20.*

Partiendo de la relación encontrada en el problema **P2** y estableciendo la nueva relación n = 4m – 20, se obtiene la ecuación a resolver:

$|20 - 3m| = 2(4m - 20) - 4m - 2.$

Después de realizar algunas manipulaciones algebraicas que no detallaremos aquí, se obtienen una única solución n = 68 y m = 22.

La solución de las tareas de **M2’** es siempre un valor numérico concreto. Habitualmente, el modelo dominante del álgebra escolar como aritmética generalizada la reduce al trabajo en **M2’**, esto es, a la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico y a la resolución de ecuaciones con una incógnita. Nuestro modelo epistemológico propone un proceso de algebrización más amplio que no sólo incluye las tareas de **M2** sino que requiere una nueva ampliación para considerar relaciones entre PCA con varios argumentos.

Tercera etapa del proceso de algebrización

La tercera etapa del proceso de algebrización corresponde al momento en que se requiere una fuerte generalización de los problemas de **M2** debido a la necesidad de no limitar del número de variables y de no distinguir entre incógnitas y parámetros.

Por ejemplo, el siguiente problema ya no forma parte de M2:

> **P3**: *¿Qué relación hay entre el perímetro P y el área A de un triángulo isósceles? ¿En qué casos P y A determinan un único triángulo isósceles?*

El modelo algebraico considerado no tiene cabida en **M2** y se podría expresar como sigue (no detallamos los cálculos aquí):

$$-2 \cdot P \cdot b3 + P2 \cdot b2 = 16 \cdot A2.$$

Se requiere una nueva organización matemática, **M3**, que contiene **M**2 y constituye una completación relativa de ésta (Fonseca, 2004), en el sentido que unifica los tipos de problemas, técnicas y elementos teóricos de **M2**.

$M_2 \subset M_3$: Problemas representables por una fórmula algebraica sin limitar el número de variables y sin diferenciar las incógnitas de los parámetros: PCA(x1, …, xm, a1, …, an) = 0 + técnicas para estudiar cómo depende cada variable de las restantes.

Las técnicas para abordar estas cuestiones en el ámbito puramente algebraico son bastante limitadas. Cuando el PCA es más complejo, por ejemplo cuando no tiene una estructura "lineal", se necesita generalmente el paso a la modelización funcional.

Conclusiones

Tomando como ejemplo particular la OM en torno a un tipo de problemas aritméticos lineales[7], hemos esbozado cómo podrían materializarse las sucesivas etapas del proceso de algebrización, indicando la razón de ser de cada una de ellas.

El sistema inicial que hemos considerado retoma una actividad realizada por los alumnos en una etapa educativa anterior, el cálculo aritmético, para desarrollarlo y abordar nuevos problemas que no pueden resolverse con la ejecución de PCA. A partir de aquí, el proceso de algebrización se presenta de forma sucesiva, ampliando cada vez el tipo de problemas que se pueden resolver y las nuevas cuestiones que surgen. De la escritura de los PCA (primera etapa) se pasa a la necesidad de establecer relaciones entre PCA con dos argumentos no numéricos (segunda etapa) o con un número cualquiera de argumentos no numéricos (tercera etapa).

El MER que hemos desarrollado muestra que la razón de ser del álgebra escolar no puede reducirse a la ampliación de la solución aritmética de los problemas mediante el cálculo ecuacional. Se requiere un cuestionamiento "teórico" sobre los PCA que genere la necesidad de escribirlos para modificarlos y relacionarlos. En particular, el proceso de algebrización elemental culminaría en **M3** (trabajo con fórmulas) y no en **M2'** (trabajo con ecuaciones).

Más allá de la ESO, el desarrollo del modelo epistemológico que hemos descrito aquí conduce hacia los niveles de modelización (algebraico)-funcional y al uso

---

[7] Hemos preferido usar ejemplos de PCA con estructura "lineal" porque son más adecuados para el proceso de *introducción* del instrumento algebraico. Sin embargo, para ejemplificar el salto que representan las sucesivas etapas del proceso de algebrización es más adecuado utilizar PCA no lineales.

de las técnicas del cálculo infinitesimal, aportando así cuestiones problemáticas que constituirán una posible razón de ser al cálculo diferencial de Bachillerato (Ruiz-Munzón, 2006). Nuestro trabajo actual se concentra en el análisis de la experimentación de secuencias de enseñanza basadas en este modelo, tanto en la ESO como en el bachillerato.

Referencias

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*, Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? *Quaderni di Ricerca in Didattica, 14*, 125-133.

Cid, E. (2001). Los Modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. *Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 31*. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

Cid, E. y Bolea, P. (2010). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*. Montpellier: IUFM de Montpellier.

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique et nouvelle épistémologie scolaire. En: Ducourtioux, C. & Hennequin, P.-L. (Éds.) *La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire. Publications de l'APMEP Nº 168*, 239-263. París: APMEP.

Filloy, E., Puig, L. & Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias, 25* (3), 327-342.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad* (Tesis doctoral). Universidad de Vigo.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del Patrón Análisis-Síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en didactique des mathématiques, 13*(3), 295-332.

García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tesis doctoral). Universidad de Jaén.

García, F. J. (2007). El álgebra como instrumento de modelización. Articulación del estudio de las relaciones funcionales en la educación secundaria. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Actas del XI Simposio de la SEIEM Investigación en educación matemática XI*, pp. 71-90. San Cristóbal de la Laguna, Santa Cruz de Tenerife

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 145-156.

Ruiz-Munzón, N. (2006). *Ecologia de la modelització algebraico-funcional al Batxillerat.* (Memoria de investigación, Diploma de estudios avanzados), Universitat Autònoma de Barcelona.

Sierra, T. (2006). *Lo Matemático en el diseño y análisis de Organizaciones Didácticas. Los Sistemas de Numeración y la Medida de Magnitudes Continuas* (Tesis Doctoral). Universidad Complutense de Madrid.