Épsilon - Revista de Educación Matemática 2013, Vol. 30(1), nº 83, 105-126

«Comprar un caballo»: soluciones históricas a un tipo de problemas famosos

Vicente Meavilla Seguí
(meavilla@unizar.es)
Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza
Antonio M. Oller-Marcén
(oller@unizar.es)
Centro Universitario de la Defensa, Academia General Militar

Resumen: *La resolución de problemas es una tarea a la que se han dedicado los matemáticos aficionados y profesionales a lo largo de los siglos. Algunos problemas se han mantenido durante mucho tiempo, ocupando secciones fijas en los manuales consagrados a la enseñanza de las Matemáticas. Por otro lado, las estrategias utilizadas para resolverlos han ido cambiando con el paso de los años. En este artículo presentamos un tipo de problemas clásicos («problemas de comprar un caballo») y el tratamiento que hicieron de él algunos matemáticos de primera fila y otros menos conocidos por el público no iniciado.*

Palabras clave: *Resolución de problemas, problemas de comprar un caballo, historia de las Matemáticas, historia de la Educación Matemática.*

«Buy a horse»: Historical solutions to sorts of problems famous

Abstract: *Problem solving is one of the main tasks carried out both by amateur and professional mathematicians over the centuries. In some cases, particular problems have maintained for a long time, with fixed sections in textbooks being devoted to them. On the other hand, the solving strategies have changed over the years. In this paper we present one of such types of classical problems («problems about buying a horse») and the treatment given to these problems by some top mathematicians and also by others that may not be so known by the uninitiated.*

Keywords: *Problem solving, problems about buying a horse, history of mathematics, mathematics education history*

INTRODUCCIÓN

El *espacio básico de un problema* (es decir: el conjunto de todas las formas de resolverlo y de todos los pasos posibles dentro de cada una de ellas) constituye una de las herramientas fundamentales a la hora de enseñar o aprender Matemáticas en un contexto de resolución de problemas.

Resulta obvio que para desarrollar una enseñanza de este tipo, el profesor debe disponer de buenas colecciones de problemas y de un amplio catálogo de estrategias que permitan resolverlos. Es aquí donde la historia de las Matemáticas puede prestar una ayuda inestimable dado que en los textos de carácter matemático que se han escrito a lo largo de los tiempos se encuentran, por un lado, estupendas antologías de problemas y, por otro, repertorios de procedimientos de resolución cuyo interés didáctico es notable.

Parece, pues, que una revisión histórica de los manuales de contenido matemático facilitaría la elaboración de una selección de problemas y de estrategias de resolución que, puestas a disposición de profesores y alumnos, podría ayudar a estos cuando se enfrentasen a determinados problemas matemáticos.

Con la inclusión de *problemas históricos* y de *estrategias históricas de resolución*, tanto los profesores como los alumnos implicados en el proceso de enseñanza-aprendizaje pueden disfrutar de las siguientes ventajas:

Tener a su disposición a un buen número de tutores (autores, matemáticos) de otras épocas (*los tutores históricos*) que pueden ayudarles en las situaciones problemáticas a las que se enfrenten.

Disponer de colecciones de problemas que han perdurado a lo largo de los tiempos.

Conocer antiguos procedimientos de resolución que pueden ampliar el espacio básico de un problema.

Comparar los procedimientos de resolución actuales con los antiguos y valorar las herramientas matemáticas de las que disponen en la actualidad.

«PROBLEMAS DE COMPRAR UN CABALLO»

> Cuatro compran una cosa. El primero dice a los otros tres que le den $\frac{1}{2}$, el segundo pide a los otros tres $\frac{1}{3}$, el tercero $\frac{1}{4}$, el cuarto pide $\frac{1}{5}$ a todos. ¿Cuánto tiene cada uno y cuánto vale la cosa?

En el problema anterior, extraído de un impreso español escrito por Gaspar de Texeda en 1546, cuatro socios quieren comprar una cosa pero ninguno tiene bastante dinero para comprarla. Por esto, cada uno toma una fracción de la suma del capital de los otros y así puede comprarla.

Cuestiones similares a la anterior se introdujeron en la Europa medieval de la mano de Leonardo de Pisa «Fibonacci» (*Liber Abaci,* 1202, capítulos 12 y 13). En ellas la cosa que querían comprar los hombres era un caballo (*de hominibus equum emare volentibus*); por este motivo, estos asuntos se conocen como «problemas de comprar un caballo».

PRIMEROS ANTECEDENTES: ALGUNOS PROBLEMAS CHINOS Y DOS EJEMPLOS DE DIOFANTO

Como sucede con la práctica totalidad de los problemas que aparecen en textos aritméticos del Renacimiento, podemos rastrear el origen del problema anterior hasta bastantes siglos atrás.

En nuestro caso, los ejemplos más antiguos encontrados corresponden a textos chinos y a la aritmética de Diofanto. En ellos no se hace referencia a la compra de caballos; sin embargo, un análisis detenido de los mismos hace evidentes las similitudes. En concreto el contexto general es el de varias personas que poseen una cierta cantidad de dinero de forma que si cada uno toma una fracción del dinero de uno o varios de sus compañeros, todos tienen la misma cantidad.

PROBLEMAS CHINOS

En el capítulo 8 del *Chiu-Chang Suan-Shu* (Arte de calcular en nueve capítulos), obra anónima escrita en la época Han (periodo comprendido entre el 206 a. C. y el 221 d. C.), encontramos el problema siguiente:

> Hay dos personas A y B. Cada una tiene una cantidad desconocida de monedas. La persona A, tomando la mitad de las monedas de B, tiene 50 monedas. La persona B, tomando las dos terceras partes de las monedas de A, también tiene 50 monedas. Dime: ¿cuántas monedas tiene cada una?
>
> Respuesta: A tiene $37\frac{1}{2}$ monedas. B tiene 25 monedas.
>
> Método: Resuelve mediante el método de la matriz; suma y resta (Kangshen et al., 1999, p. 411).

El problema se resuelve utilizando un procedimiento análogo al «método de Gauss» para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \\ 50 & 50 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \\ 150 & 100 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 50 & 100 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{B} = 25 \Rightarrow \mathrm{A} = 37\frac{1}{2}$$

En el *Sunzi suanjing* (Cap. 3, problema 28), texto chino del siglo IV, aparece un problema casi idéntico que también se resuelve por el método de Gauss

> A y B tienen una cantidad desconocida de monedas. La persona A, tomando la mitad de las monedas de B, tiene 48 monedas. La persona B, tomando las dos terceras partes de las monedas de A, también tiene 48 monedas. Dime: ¿cuántas monedas tienen A y B, respectivamente?
>
> Respuesta: A tiene 36 monedas y B tiene 24 (Kangshen et al., 1999, p. 411).

Por otro lado, el *Zhang Qiujian suanjing* (Cap. 3, problema 4), manual del siglo V, contiene el siguiente problema resuelto por el método de Gauss (Kangshen et al., 1999, p. 411):

> Hay tres personas A, B y C, cada una con un número desconocido de monedas. A dice: si tomo 2/3 de las monedas de B y 1/3 de las monedas de C, entonces tendré 100 monedas. B dice: si tomo 2/3 de las monedas de A y 1/2 de las monedas de C, entonces tendré 100 monedas. C dice: si tomo 2/3 de las monedas de A y 2/3 de las monedas de C, entonces tendré 100 monedas. Dime: ¿cuántas monedas tienen A, B y C?
>
> Respuesta: A tiene 60 monedas, B tiene 45 y C tiene 30.

EJEMPLOS DE DIOFANTO

La primera noticia, que sepamos, relativa a los «problemas de comprar un caballo» en la antigua Grecia, se encuentra en el Libro I (problemas 24 y 25) de la *Aritmética* de Diofanto de Alejandría[1] (Heath, 1910). Diofanto, fiel a la concepción puramente abstracta de la matemática griega, prescinde de todo contexto a la hora de presentar los enunciados. Así, frente a los ejemplos chinos anteriores, en los que se habla de personas que tienen dinero y que lo toman prestando de sus compañeros, en este caso el autor se referirá simplemente a números.

El problema 24 del texto de Diofanto dice lo siguiente:

> Encontrar tres números tales que, si cada uno recibe una fracción dada de la suma de los otros dos, todos los resultados son iguales.

Para «resolver» este problema indeterminado, Diofanto admite que el primer número recibe la tercera parte de la suma de los dos restantes, el segundo recibe la cuarta parte de la suma de los otros dos y el tercero la quinta parte de la suma de los dos restantes. Por otro lado asume que el primer número es x [= *aritmo*]. Por último, como la suma del segundo y tercero debe dividirse por tres, toma esta suma igual a 3. Con esto, se tiene que:

$$\text{Suma de los tres números} = x + 3$$

$$\textit{Primero} + \frac{1}{3}\,(\text{segundo} + \text{tercero}) = x + 1$$

1. ca. 200 – ca. 284.

Por tanto: $$\text{Segundo} + \frac{1}{4}(\text{primero} + \text{tercero}) = x + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4 \cdot \text{segundo} + \text{primero} + \text{tercero} = 4x + 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3 \cdot \text{segundo} + \text{primero} + \text{segundo} + \text{tercero} = 4x + 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3 \cdot \text{segundo} + x + 3 = 4x + 4 \Rightarrow 3 \cdot \text{segundo} = 3x + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{Segundo} = x + \frac{1}{3}$$

Además: $$\text{Tercero} + \frac{1}{5}(\text{primero} + \text{segundo}) = x + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5 \cdot \text{tercero} + \text{primero} + \text{segundo} = 5x + 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4 \cdot \text{tercero} + \text{primero} + \text{segundo} + \text{tercero} = 5x + 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4 \cdot \text{tercero} + x + 3 = 5x + 5 \Rightarrow 4 \cdot \text{tercero} = 4x + 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{Tercero} = x + \frac{1}{2}$$

En consecuencia:

$$x + \left(x + \frac{1}{3}\right) + \left(x + \frac{1}{2}\right) = x + 3 \Rightarrow x = \frac{13}{12} \Rightarrow \begin{cases} \text{Segundo} = \dfrac{17}{12} \\ \text{Tercero} = \dfrac{19}{12} \end{cases}$$

De donde, eliminando los denominadores, se obtiene la siguiente solución entera del problema propuesto:

Primer número = 13, Segundo número = 17, Tercer número = 19

Por su parte, el problema número 25 dice lo siguiente:

> Encontrar cuatro números tales que, si cada uno recibe una fracción dada de la suma de los otros tres, los cuatro resultados son iguales[2].

Como en el caso anterior, para «resolver» este problema indeterminado, Diofanto admite que el primer número recibe la tercera parte de la suma de los tres restantes, el segundo recibe la cuarta parte de la suma de los otros tres, el tercero la quinta parte de la suma de los tres restantes y el cuarto recibe la sexta parte de la suma de los otros tres. Por otro lado asume que el primer número es x [= *aritmo*]. Por último, como la suma del segundo, tercero y cuarto debe dividirse por tres, toma esta suma igual a 3. A partir de estas restricciones, procediendo de forma similar a la del problema 24, se obtiene la siguiente solución entera:

2. Atendiendo a la época en que pudo publicarse el *Chiu-Chang Suan-Shu*, al periodo en que se escribió la *Aritmética* de Diofanto, y a la similitud entre el problema 10 del *Chiu-Chang Suan-Shu*, y los problemas 24 y 25 de la *Aritmética*, parece natural sospechar que hubo, o pudo haber, alguna transmisión de ideas entre dos culturas tan distintas y distantes como la china y la griega.

Primer número = 47, Segundo número = 77
Tercer número = 92, Cuarto número = 101

Los procedimientos diofánticos para obtener una solución de los problemas 24 y 25 se pueden generalizar sin más que tomar $y + z = 3\alpha$ e $y + z + t = 3\beta$ (siendo y el segundo número, z el tercero y t el cuarto) respectivamente. Con esto, siguiendo el discurso de Diofanto, las infinitas soluciones de los problemas 24 y 25vienen dadas por:

$$x = \frac{13\alpha}{12} \quad , \quad y = \frac{17\alpha}{12} \quad , \quad z = \frac{19\alpha}{12}$$
$$x = \frac{47\beta}{90} \quad , \quad y = \frac{77\beta}{90} \quad , \quad z = \frac{92\beta}{90} \quad , \quad t = \frac{101\beta}{90}$$

CABALLOS ÁRABES EN EL ÁLGEBRA DE AL-KARAGI

La *Aritmética* de Diofanto fue traducida del griego al árabe por Qusta ibn Luqa al-Balabakki (820 – 912). De este modo se puso a disposición de los estudiosos árabes uno de los libros de álgebra más influyentes de la historia de las Matemáticas.

Entre los matemáticos en cuya obra se aprecia la influencia de Diofanto se encuentra Abu Bakr Muhammad ibn al-Hasan al-Karagi (953 – ca. 1029).

En su tratado de álgebra *Kitab al-Fajri*, encontramos un problema[3] (Woepcke, 1853) que coincide con un caso particular del problema 24 de Diofanto. Nos serviremos del simbolismo moderno para describir el proceso seguido por el matemático árabe.

$$\begin{cases} x + \dfrac{y+z}{3} = 20 \Rightarrow y + z = 60 - 3x & [1] \\ y + \dfrac{z+x}{4} = 20 \Rightarrow 4y + z = 80 - x & [2] \\ z + \dfrac{x+y}{5} = 20 \Rightarrow 5z + y = 100 - x & [3] \end{cases}$$

$$[2] - [1] \Rightarrow 3y = 20 + 2x \Rightarrow \boldsymbol{y = \frac{20}{3} + \frac{2}{3}x}$$

Sustituyendo esta expresión de y en [1], resulta:

$$\frac{20}{3} + \frac{2}{3}x + z = 60 - 3x \Rightarrow z = 60 - 3x - \frac{20}{3} - \frac{2}{3}x \Rightarrow \boldsymbol{z = \frac{160}{3} - \frac{11}{3}x}$$
$$[3] - [1] \Rightarrow 4z = 40 + 2x \Rightarrow 10 + \frac{x}{2} = z = \frac{160}{3} - \frac{11}{3}x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{11x}{3} = \frac{160}{3} - 10 \Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{52}{5}}$$

3. En la edición de Woepcke, dicho problema carece de enunciado verbal.

A partir de estos resultados, se obtiene que:

$$y = \frac{68}{5}, \quad z = \frac{76}{5}$$

El autor añade:

> Si los segundos miembros de las ecuaciones propuestas son desconocidos[4], se les puede asignar un valor arbitrario y se procede como antes; también se les puede dar un valor desconocido y poner $x + z = 4$ para que se pueda tomar la cuarta parte de esta suma, o igual a otro número cualquiera.

Si se toma $x + z = 4$, se tiene que:

$$z + \frac{x+y}{5} = y + 1 \Rightarrow 4y + 5 = x + 5z$$

Como $x + z = 4$, resulta:

$$4y + 1 + x + z = x + 5z \Rightarrow 4y + 1 = 4z \Rightarrow z = y + \frac{1}{4} \quad [4]$$

Entonces: $x = 4 - z = 4 - \left(y + \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{4} - y \quad [5]$

Además: $x + \frac{y+z}{3} = y + 1$

Por tanto, sustituyendo las expresiones [4] y [5] en la igualdad anterior, se obtiene que:

$$y = \frac{17}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{13}{8} \\ z = \dfrac{19}{8} \end{cases}$$

Por último, el autor añade que $x = 13$, $y = 17$, $z = 19$ también es solución de las ecuaciones propuestas.

MÁS CABALLOS EN EL LIBER ABACI DE LEONARDO DE PISA

En el *Liber Abaci*, Fibonacci dedica la quinta parte del capítulo 12 a estudiar problemas sobre "la compra de caballos entre socios de acuerdo a una proporción dada" (Sigler, 2002, p. 337). El tratamiento que Leonardo da a este tipo de problemas es exhaustivo.

4. En este caso, el problema que resulta es indeterminado y su traducción al simbolismo algebraico viene dada por el sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas siguiente:

$$x + \frac{y+z}{3} = y + \frac{z+x}{4} = z + \frac{x+y}{5}$$

Aparecen un total de 33 problemas (en tres de ellos no aparecen caballos, sino vasijas, silos o un barco, pero la esencia es la misma) y 30 de ellos se resuelven con todo detalle (en los otros 3 tan solo se indica la solución).

Esencialmente encontramos 11 tipos de problemas diferentes, que se detallan a continuación. En todos ellos se pide siempre calcular el dinero de cada hombre así como el precio del caballo (o los caballos, cuando hay más de uno).

Tipo 1: n hombres compran 1 caballo. Cada uno de los hombres toma prestada una fracción dada del dinero del siguiente cíclicamente (el último lo coge del primero), de tal modo que todos pueden comprar el caballo.

Este problema aparece para $n = 2, 3, 4,$ y 5. Este tipo de problema siempre tiene infinitas soluciones (aunque Fibonacci no lo indica explícitamente) salvo que se fije el precio del caballo, en cuyo caso la solución es única (Leonardo lo hace en un caso para $n = 2$).

Tipo 2: n hombres compran n caballos. Cada uno de los hombres toma prestada una fracción dada del dinero del siguiente cíclicamente, de tal modo que así el k-ésimo hombre puede comprar el k-ésimo caballo. Se conoce la diferencia de precios (creciente) entre cada caballo y el siguiente.

Este problema aparece para $n= 2, 3, 4$ y 5. Este tipo de problema tiene infinitas soluciones, cosa que Fibonacci indica en el transcurso de la resolución del primer ejemplo para $n = 2$.

Tipo 3: n hombres compran 1 caballo. Cada uno de ellos toma una fracción dada del dinero que tienen entre los dos siguientes cíclicamente, de tal modo que todos pueden comprar el caballo.

Este problema aparece sólo para $n = 4$.

Tipo 4: n hombres compran 1 caballo. Cada pareja (consecutiva) de hombres toma una fracción dada del dinero del siguiente cíclicamente, de tal modo que cada una de esas parejas puede comprar el caballo.

Este problema aparece para $n = 3$ y 4.

Tipo 5: n hombres compran 1 caballo. Cada tres hombres (consecutivos) toman una fracción dada del dinero del siguiente cíclicamente, de tal modo que cada uno de esos tríos puede comprar el caballo.

Este problema sólo aparece para $n = 5$.

Tipo 6: n hombres compran 1 caballo. Cada uno de ellos toma una fracción dada del dinero que tienen todos los demás juntos, de tal modo que todos pueden comprar el caballo.

Este problema aparece para $n = 3, 4$ y 5.

Tipo 7: n hombres compran 1 caballo. Cada pareja (consecutiva) de hombres toma una fracción dada del dinero que tienen todos los demás juntos, de tal modo que cada una de esas parejas puede comprar el caballo.

Este problema aparece para $n = 4$ y 5. Este tipo de problemas no tiene por qué tener solución. De hecho el caso $n = 4$ carece de ella, como demuestra el propio Fibonacci.

Tipo 8: n hombres compran 1 caballo. Cada tres hombres (consecutivos) toman una fracción del dinero que tienen todos los demás juntos, de tal modo que cada uno de esos tríos puede comprar el caballo.

Este problema aparece para $n = 7$, con la indicación de que sí tiene solución.

Tipo 9: n hombres compran n caballos. Cada uno de ellos toma una fracción del dinero de todos los demás, de tal modo que así el k-ésimo hombre puede comprar el k-ésimo caballo. Se conoce la diferencia (creciente) de precios entre cada caballo y el siguiente.

Este problema aparece para $n = 2$, 3 y 4.

Tipo 10: n hombres compran 1 caballo. Cada uno de ellos toma una fracción (distinta) del dinero de cada uno de los otros, de tal modo que todos pueden comprar el caballo.

Este problema aparece para $n = 3$ y 4.

Tipo 11: n hombres compran 1 caballo. Cada pareja (consecutiva) de hombres toma una fracción dada del dinero que tienen los dos siguientes juntos, cíclicamente, de tal modo que cada una de esas parejas puede comprar el caballo.

Este problema aparece únicamente para $n = 5$.

Frente a esta amplia variedad de problemas, los métodos de resolución utilizados por Fibonacci son escasos. El autor resuelve estos problemas esencialmente de dos formas diferentes. En el capítulo 12 utiliza el llamado «método de la proporción» mientras que en el capítulo 13 recurre al método de dos falsas posiciones.

El método de la proporción

Este método consiste, esencialmente, en ir manipulando los datos del problema para obtener que una fracción del dinero de cada persona es igual a una fracción del dinero de la siguiente. Una vez hecho esto se busca cada pareja de cantidades con cuidado para que los valores obtenidos en cada caso sean consistentes.

Veamos un ejemplo:

> Hay tres hombres. El primero toma del segundo 1/3 de sus besantes. El segundo toma del tercero 1/4 y el tercero toma del primero 1/5. Se afirma que cada uno de ellos puede así comprar el caballo.

Vamos a presentar de forma abreviada (pues Fibonacci es bastante prolijo y algo repetitivo en sus explicaciones) cómo se resuelve este problema por el citado método. Se comienza observando lo siguiente:

$$\text{primero} + \frac{1}{3}\text{segundo} = \text{segundo} + \frac{1}{4}\text{tercero} \Rightarrow \text{primero} = \frac{2}{3}\text{ segundo} + \frac{1}{4}\text{ tercero [1]}$$

$$\text{segundo} + \frac{1}{4}\text{ tercero} = \text{tercero} + \frac{1}{5}\text{ primero} \Rightarrow \text{segundo} = \frac{3}{4}\text{ tercero} + \frac{1}{5}\text{ primero [2]}$$

$$\text{tercero} + \frac{1}{5}\text{ primero} = \text{primero} + \frac{1}{3}\text{ segundo} \Rightarrow \text{tercero} = \frac{4}{5}\text{ primero} + \frac{1}{3}\text{ segundo [3]}$$

De [3] resulta que: $\dfrac{1}{4}\text{ tercero} = \dfrac{1}{5}\text{ primero} + \dfrac{1}{12}\text{ segundo.}$

Y si esto se sustituye es [1] tenemos:

$$\text{primero} = \frac{2}{3}\ \text{segundo} + \frac{1}{5}\ \text{primero} + \frac{1}{12}\ \text{segundo} \Rightarrow \frac{4}{5}\ \text{primero} = \frac{3}{4}\ \text{segundo}$$

Así que hay que encontrar dos números de forma que 4/5 del primero sean 3/4 del segundo. Fibonacci encuentra 15 para el primero y 16 para el segundo.

Razonando como antes, pero sustituyendo [2] en [1] se tiene que:

$$\frac{13}{15}\ \text{primero} = \frac{3}{4}\ \text{tercero}$$

Por lo que ahora el autor busca dos números tales que 13/15 del primero sean 3/4 del tercero. En este caso encuentra 45 para el primero y 52 para el tercero.

Para terminar, se deben «ajustar» estas soluciones. En el paso anterior se encontraron 15 y 16 como soluciones particulares, pero habrían servido cualesquiera múltiplos de dichos valores. Como ahora se ha obtenido 45 para el primer hombre, está claro que se debe multiplicar por 3 la solución anterior y se obtiene la solución:

Primero: 45 besantes, Segundo: 48 besantes, Tercero: 52 besantes.

Una vez conocido el dinero que tiene cada hombre es trivial obtener el precio del caballo, que en este caso resulta ser de 61 besantes.

El ejemplo presentado es un problema de tipo 1, con 3 hombres; es decir, uno de los casos más sencillos. Sin embargo, si se observa el método detenidamente, no resulta difícil entender cómo puede utilizarse en el resto de casos.

Una solución general para los problemas de tipo 1

Pese a que el método que hemos descrito en el apartado anterior resulta sumamente útil a la hora de resolver los problemas planteados, Fibonacci presenta un método «iterativo» general para dar la solución a problemas del tipo 1 antes descritos.

> Consideremos el siguiente enunciado general:
>
> Supongamos que n hombres desean comprar un caballo de tal forma que el primer hombre toma prestado $\frac{a_1}{b_1}$ del dinero del segundo, el segundo toma prestado $\frac{a_2}{b_2}$ del dinero del tercero y así sucesivamente hasta que el n-ésimo hombre toma prestado $\frac{a_n}{b_n}$ del dinero del primero y haciendo esto, todos ellos tienen la cantidad necesaria para comprar el caballo.

Para resolver este problema Fibonacci da el siguiente método: Para cada $k \in \{1,\ldots,n\}$ se definen los siguientes números:

$$x_k^{(1)} = (b_k - a_k)b_{k+1} + a_k a_{k+1},$$
$$x_k^{(r)} = x_k^{(r-1)} b_{k+r} + (-1)^{r+1} a_k a_{k+1} \dots a_{k+r}, \text{ si } 2 \leq r \leq n-2,$$
$$x_k^{(n-1)} = x_k^{(n-2)} b_{k+n-1}.$$

Donde hay que considerar que los subíndices se toman módulo n; es decir, a_{n+3} es a_3, etc… Obsérvese que se van construyendo paso a paso iterativamente.

Entonces Fibonacci afirma que la cantidad de dinero que posee el hombre k-ésimo es exactamente $x_k^{(n-1)}$. Además, el valor del caballo resulta ser:

$$C = b_1 b_2 \cdots b_k + (-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_k.$$

Evidentemente esta es sólo una de las infinitas soluciones que, en general, poseen este tipo de problemas, pero es totalmente correcta. La demostración rigurosa de este hecho la dejamos en manos del lector, su relativa complejidad le hará apreciar aún más su valor.

Una solución general para los problemas de tipo 6

El anterior no es el único método general dado por Fibonacci para resolver uno de los tipos de problemas considerados. Los problemas de tipo 6 también son merecedores de un procedimiento específico. Veámoslo.

Sea el siguiente enunciado general:

> Supongamos que n hombres desean comprar un caballo de tal forma que el primer hombre toma prestado $\frac{a_1}{b_1}$ del dinero de los demás, el segundo toma prestado $\frac{a_2}{b_2}$ del dinero de los demás y así sucesivamente hasta que el n-ésimo hombre toma prestado $\frac{a_n}{b_n}$ del dinero del resto, de modo que, haciendo esto, todos ellos tienen la cantidad necesaria para comprar el caballo.

En este contexto, Fibonacci efectúa los siguientes cálculos:

$$D = \text{m.c.m.}(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n),$$
$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{D b_i}{b_i - a_i}.$$

Una vez hecho esto, el autor afirma:

- S es la suma del dinero de todos los hombres implicados.
- El precio del caballo es $C = S - (n-1)D$.

- El dinero del k-ésimo hombre es $x_k = C - \frac{(n-1)Da_k}{b_k - a_k}$.

Nuevamente dejaremos en manos del lector la ardua tarea de demostrar la corrección de estas fórmulas.

El método de dos falsas posiciones

La mayor parte de los problemas de compra de caballos, en concreto 28 del total de 33, se presentan en el capítulo 12 y son resueltos según alguno de los tres métodos anteriores. Sin embargo, en el capítulo 13, que Fibonacci dedica al método de falsa posición (que él llama *elchataym*[5]) se revisan problemas que ya han sido resueltos en capítulos anteriores por otro tipo de métodos puesto que, como dice el propio Leonardo en el título del capítulo "con este método casi todos los problemas matemáticos son resueltos".

En el capítulo se presenta y se utiliza tanto la regla de una falsa posición como la de dos falsas posiciones. Los problemas de comprar caballos, por su forma, se circunscriben a este segundo tipo. En Meavilla (2005) puede leerse una amplia discusión sobre el uso del método de dos falsas posiciones para resolver problemas similares al que nos ocupa, por lo que no nos detendremos en describir este método de resolución.

LOS «PROBLEMAS DE COMPRAR UN CABALLO» EN LA OBRA DE FR. JUAN DE ORTEGA

Fray Juan de Ortega, palentino de origen y dominico adscrito a la provincia de Aragón, enseñó Aritmética y Geometría en España e Italia durante muchos años privada y públicamente (Rey Pastor, 1926), publicó en 1512 uno de los libros de aritmética más notables del Siglo de Oro español. Nos referimos a la *Conpusicion de la arte de la arismetica y juntamente de geometría*[6], que alcanzó diversas ediciones en 1515, 1552, 1534, 1537, 1542, 1552, 1563 y 1612.

En la sección consagrada a la falsa posición, Ortega presenta ocho problemas del tipo «comprar un caballo».

Los tres primeros son del tipo 6 (n = 3, 4, y 5, respectivamente), el cuarto también es del tipo 6 (n = 3) con el precio del caballo [= pieza de seda] conocido, el quinto es del tipo 1 (n = 2), el sexto es del tipo 1 (n = 2) con el precio del caballo [= paño] conocido, el séptimo es del tipo 1 (n = 3), y el octavo es del tipo 1 (n = 3) con el precio del caballo [= casas] conocido.

A modo de ejemplo, vamos a considerar la resolución de los problemas primero y cuarto.

En cuanto al problema 1, podemos leer (fols. 171r – 171v):

5. El nombre árabe original es hisab al-Khataayn.

6. Este es el título que aparece en la edición de 1512. En otras ediciones el título es *Tractado subtilissimo d[e] arismetica y geometria* con el que se conoce la aritmética de Ortega.

> Tres mercaderes quieren comprar una pieza de brocado cada uno por sí. Porque a ninguno de ellos le basta su caudal, dice el uno a los dos que le den la mitad de los dineros que ellos tienen y con lo que él tiene comprará la pieza de brocado. El segundo dice a los otros dos que le den la tercera parte de los ducados que tienen y con los que él tiene también la comprará. El tercero dice que le den los otros dos la cuarta parte de lo que tienen y con los dineros que él tiene también comprará la pieza. Demando: ¿cuántos ducados tenía cada uno y cuánto valía la pieza?
> Respuesta.
> Harás así. Porque el uno demanda la mitad, y el otro el tercio, y el otro el cuarto, busca un número donde quepan todos estos tres números $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ y hallarás que el menor número donde todos pueden caber es 12. Pues nota que porque el primero demanda la mitad, tú doblarás los 12, y serán 24. Asimismo, porque el segundo demanda el tercio, tú añadirás a los mismos 12 su mitad, que son 6, y montarán 18. Asimismo, por el que demanda el cuarto, tú tomarás el tercio de 12, que son 4, y lo añadirás a los mismos 12, y serán 16. Después, suma todos estos tres números, como son 24, 18 y 16, y montarán 58, los cuales parte por uno menos que son los hombres, como por 2, y vendrá a la partición 29. De los 29 quita el número donde cupieron los tres números, que son los 12, y quedarán 17, y tantos ducados dirás que valía la pieza. Para saber cuántos ducados tenía el primero, quita los 24 de los 29 y quedarán 5, y tantos ducados dirás que tenía. Asimismo, quita los 18 de los 29 y quedarán 11, y tantos ducados tenía el segundo. Asimismo, quita los 16 de los 29 y quedarán 15 ducados, y tantos ducados tenía el tercero […].

Desconocemos cómo obtuvo Ortega la regla de resolución; sin embargo, sospechamos que se ajusta al modelo siguiente, que presentamos haciendo uso de simbolismo moderno.

Sean x, y, z los ducados del primer, segundo y tercer mercader, respectivamente. Sea P el precio, en ducados, de la pieza de brocado. Entonces, la traducción simbólica del enunciado es:

$$[*] \begin{cases} x+\frac{1}{2}(y+z)=P \\ y+\frac{1}{3}(x+z)=P \\ z+\frac{1}{4}(x+y)=P \end{cases}$$

Así pues:

$$\begin{cases} x+y+z=P+\frac{1}{2}(y+z) \\ x+y+z=P+\frac{2}{3}(x+z) \\ x+y+z=P+\frac{3}{4}(x+y) \end{cases} \Rightarrow P+\frac{1}{2}(y+z)=P+\frac{2}{3}(x+z)=P+\frac{3}{4}(x+y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(y+z)=\frac{2}{3}(x+z)=\frac{3}{4}(x+y)=\lambda$$

Dando valores a λ se obtienen las infinitas soluciones del sistema de ecuaciones [*]. Para el valor concreto de $\lambda = 12$ se tiene:

$$\frac{1}{2}(y+z)+\frac{1}{2}(y+z)=12+12=24=y+z$$

$$\frac{2}{3}(x+z)+\frac{1}{3}(x+z)=\frac{2}{3}(x+z)+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x+z)=12+6=18=x+z$$
$$\frac{3}{4}(x+y)+\frac{1}{4}(x+y)=\frac{3}{4}(x+y)+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}(x+y)=12+4=16=x+y$$

Es decir:

$$\begin{cases} y+z=24 \\ x+z=18 \\ x+y=16 \end{cases} \Rightarrow 2(x+y+z)=58 \Rightarrow x+y+z=29$$

Y, por tanto:

$$P=x+y+z-\frac{1}{2}(y+z)=29-12=17\ ducados$$
$$x=x+y+z-(y+z)=29-24=5\ ducados$$
$$y=x+y+z-(x+z)=29-18=11\ ducados$$
$$z=x+y+z-(x+y)=29-16=13\ ducados$$

El problema 4 del mismo texto posee el siguiente enunciado [fols. 173r – 173v]:

> Tres mercaderes quieren comprar una pieza de seda y, porque ninguno de ellos por sí la puede comprar, dice el primero a los dos que le den la tercera parte de lo que tienen y que con los ducados que él tiene comprará la pieza. Nota que la pieza valía 100 ducados. El segundo dice a los otros dos que le den la cuarta parte de lo que tienen y que con lo que él tiene tendrá también 100 ducados para comprar la pieza. El tercero dice a los otros dos que le den la quinta parte de lo que tienen y que también comprará la pieza con lo que tiene. Demando: ¿cuántos ducados tenía cada uno?

La resolución de Ortega, en versión original, es algo prolija y repetitiva. Por ello, presentamos una versión moderna que se ajusta al discurso del fraile palentino. Sean *x*, *y*, *z* los ducados del primer, segundo y tercer mercader, respectivamente. Entonces:

$$\begin{cases} x+\frac{1}{3}(y+z)=100 \\ y+\frac{1}{4}(x+z)=100 \\ z+\frac{1}{5}(x+y)=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=100+\frac{2}{3}(y+z) \\ x+y+z=100+\frac{3}{4}(x+z) \\ x+y+z=100+\frac{4}{5}(x+y) \end{cases}$$

Supongamos que para tres valores específicos de las incógnitas (1ª suposición) se tiene que:

$$\frac{2}{3}(y_1+z_1)=\frac{3}{4}(x_1+z_1)=\frac{4}{5}(x_1+y_1)=60=\text{m.c.m.}\,(3,4,5)$$

A partir de aquí (véase la resolución del problema 1), se tiene que:

$$\begin{cases} y_1+z_1=90 \\ x_1+z_1=80 \\ x_1+y_1=75 \end{cases} \Rightarrow 2(x_1+y_1+z_1)=245 \Rightarrow x_1+y_1+z_1=122\frac{1}{2}$$

Por tanto: $$P_1=x_1+y_1+z_1-60=62\tfrac{1}{2}\neq 100$$

$$x_1=x_1+y_1+z_1-(y_1+z_1)=122\frac{1}{2}-90=32\frac{1}{2}$$

$$y_1=x_1+y_1+z_1-(x_1+z_1)=122\frac{1}{2}-80=42\frac{1}{2}$$

$$z_1=x_1+y_1+z_1-(x_1+y_1)=122\frac{1}{2}-75=47\frac{1}{2}$$

Habiendo llegado a este punto, Ortega calcula la solución del problema haciendo uso de la regla de tres.

- Si $62\frac{1}{2}$ me dan $32\frac{1}{2}$, entonces 100 me darán 52 ducados [= *x*].
- Si $62\frac{1}{2}$ me dan $42\frac{1}{2}$, entonces 100 me darán 68 ducados [= *y*].
- Si $62\frac{1}{2}$ me dan $47\frac{1}{2}$, entonces 100 me darán 76 ducados [= *z*].

Vamos a tratar de presentar una justificación del procedimiento anterior. En el sistema indeterminado

$$[**]\begin{cases} x+\frac{1}{3}(y+z)=P \\ y+\frac{1}{4}(x+z)=P \\ z+\frac{1}{5}(x+y)=P \end{cases}$$

se tiene que: $$\begin{cases} x+y+z=P+\frac{2}{3}(y+z) \\ x+y+z=P+\frac{3}{4}(x+z) \\ x+y+z=P+\frac{4}{5}(x+y) \end{cases}$$

Resulta obvio que cualesquiera x, y, z que verifiquen las relaciones:

$$\frac{2}{3}(y+z)=\frac{3}{4}(x+z)=\frac{4}{5}(x+y)=\lambda\,,$$

satisfacen el sistema [**]. Por otro lado, también resulta claro que, para cada elección de λ, se obtiene una solución de [**].
Sea $\lambda = a \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{cases} y_1+z_1=\frac{3}{2}a \\ x_1+z_1=\frac{4}{3}a \\ x_1+y_1=\frac{5}{4}a \end{cases} \Rightarrow 2(x_1+y_1+z_1)=\frac{49}{12}a \Rightarrow x_1+y_1+z_1=\frac{49}{24}a$$

De donde: $P_1=x_1+y_1+z_1-\frac{2}{3}(y_1+z_1)=\frac{49}{24}a-a=\frac{25}{24}a$

$$x_1=\frac{13}{24}a\ ,\qquad y_1=\frac{17}{24}a\ ,\qquad z_1=\frac{19}{24}a$$

Sea $\lambda = m\cdot a \in \mathbb{R}$, entonces (razonando como antes) resulta que:

$$P_2=\frac{25}{24}\cdot ma=m\cdot P_1$$

$$x_2=\frac{13}{24}\cdot ma=m\cdot x_1\ ,\qquad y_2=\frac{17}{24}\cdot ma=m\cdot y_1\ ,\qquad z_2=\frac{19}{24}\cdot ma=m\cdot z_1$$

En resumen:

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}$$

para cualesquiera cuaternas (P_2, x_2, y_2, z_2)y (P_1, x_1, y_1, z_1) obtenidas para dos valores arbitrarios de λ. Así las cosas, si $P = 100$ se obtiene para un valor de λ para el cual los «valores» de las incógnitas son x, y, z, y para λ= 60 se tiene que

$$P_1=62\frac{1}{2}\ ,\qquad x_1=32\frac{1}{2}\ ,\qquad y_1=42\frac{1}{2}\ ,\qquad z_1=47\frac{1}{2}$$

Entonces: $$\frac{62\frac{1}{2}}{100}=\frac{32\frac{1}{2}}{x}=\frac{42\frac{1}{2}}{y}=\frac{47\frac{1}{2}}{z}$$

A partir de aquí se obtienen los valores de Ortega y se valida su procedimiento.

UN EJEMPLO DEL MAESTRO LEONHARD EULER

En los *Elementos de Álgebra* (Capítulo cuarto. Primera parte, cuarta sección) de Leonhard Euler (1707–1783) encontramos el problema siguiente, en el que el gran matemático suizo pone de manifiesto su buen hacer como docente.

> Tres hermanos compraron una viña por cien luises. El menor dice que él la podría haber comprado si el segundo le hubiese dado la mitad de su dinero. El segundo dice que si el mayor le hubiese dado la tercera parte de su dinero, entonces él habría comprado la viña. Finalmente, el mayor sólo hubiese necesitado la cuarta parte del dinero del menor para poder pagar la viña. ¿Cuánto dinero tenía cada uno?

La solución dada por Euler es como sigue: Supongamos que el primero tenía x luises; el segundo, y; el tercero, z. Entonces, tendremos las tres ecuaciones siguientes:

$$\text{I.)}\ x + \frac{1}{2}y = 100, \quad \text{II.)}\ y + \frac{1}{3}z = 100, \quad \text{III.)}\ z + \frac{1}{4}x = 100$$

Dos de ellas solamente dan el valor de x; a saber:

$$\text{I.)}\ x = 100 - \frac{1}{2}y, \quad \text{III.)}\ x = 400 - 4z$$

Por tanto: $100 - \frac{1}{2}y = 400 - 4z$, o bien, $4z - \frac{1}{2}y = 300.$

Esta ecuación debe combinarse con la segunda para determinar los valores de y, z. La segunda ecuación es

$$y + \frac{1}{3}z = 100, \text{ o bien } y = 100 - \frac{1}{3}z.$$

La ecuación que habíamos encontrado en último lugar era $4z - \frac{1}{2}y = 300$, o bien $y = 8z - 600$.

Por consiguiente, $100 - \frac{1}{3}z = 8z - 600.$

De donde,

$$8\frac{1}{3}z = 700, \text{ ó } \frac{25}{3}\ z = 700.$$

Luego, $z = 84$. Entonces, $y = 100 - 28 = 72$, y $x = 64$.

Respuesta. El menor tenía 64 luises; el mediano, 72; el mayor, 84.

Como en este ejemplo cada ecuación sólo tiene dos incógnitas, se puede llegar a la misma solución de una forma más cómoda. Veámoslo.

La primera ecuación se convierte en $y = 200 - 2x$. De este modo y está determinada por x. Si se sustituye este valor en la segunda ecuación, se tiene:

$$200 - 2x + \frac{1}{3}z = 100$$

De donde: $\frac{1}{3}z = 2x - 100$ y $z = 6x - 300$. De este modo, z también está determinada por x y si se sustituye su valor en la tercera ecuación, resulta: $6x - 300 + \frac{1}{4}x = 100$, ecuación que sólo contiene x, y que se reduce a $25x - 1600 = 0$. De donde, $x = 64$. Por consiguiente, $y = 200 - 128 = 72$ y $z = 384 - 300 = 84$.

Se podría seguir el mismo procedimiento cuando el número de ecuaciones sea mayor. Supongamos, por ejemplo, que tenemos:

$$\text{I.) } u + \frac{x}{a} = n, \text{ II.) } x + \frac{y}{b} = n, \text{ III.) } y + \frac{z}{c} = n, \text{ IV.) } z + \frac{u}{d} = n$$

Quitando los denominadores, las ecuaciones anteriores se convierten en:

$$\text{I.) } au + x = an, \text{ II.) } bx + y = bn, \text{ III.) } cy + z = cn, \text{ IV.) } dz + u = dn$$

La primera ecuación se convierte de forma inmediata en: $x = an - au$ y, sustituyendo este valor en la segunda, tenemos:

$$abn - abu + y = bn \text{ ó } y = bn - abn + abu$$

Sustituyendo este valor de y en la tercera ecuación resulta que:

$$bcn - abcn + abcu + z = cn \text{ ó } z = cn - bcn + abcn - abcu$$

Sustituyendo este valor de z en la cuarta ecuación obtenemos:

$$cdn - bcdn + abcdn - abcdu + u = dn \text{ ó } dn - cdn + bcdn - abcdn = - abcdu + u \text{ ó}$$
$$(abcd - 1)u = abcdn - bcdn + cdn - dn$$

De donde resulta:

$$u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}$$

Por consiguiente se tiene que:

$$x = \frac{abcdn - acdn + adn - an}{abcd - 1} = n \cdot \frac{abcd - acd + ad - a}{abcd - 1}$$

$$y = \frac{abcdn - abdn + abn - bn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{abcd - abd + ab - b}{abcd - 1}$$

$$z = \frac{abcdn - abcn + bcn - cn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{abcd - abc + bc - c}{abcd - 1}$$

$$u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = n \cdot \frac{abcd - bcd + cd - d}{abcd - 1}$$

EPÍLOGO DIDÁCTICO

La transición entre la aritmética y el álgebra supone un punto de inflexión en la formación matemática de los alumnos y, consecuentemente, es un proceso problemático desde un punto de vista didáctico.

Actualmente se acostumbra a introducir el simbolismo algebraico en un momento relativamente temprano de la formación del alumno (1º de E.S.O., 12 años). Esta prematura introducción del lenguaje algebraico presenta varios inconvenientes, por ejemplo:

- Se produce en un momento en que el alumno no ha tenido tiempo de afianzar e interiorizar en profundidad sus conocimientos sobre los significados de las operaciones aritméticas (en especial entre números racionales) y de las operaciones con cantidades de magnitud.
- Se introduce el uso del simbolismo algebraico de un modo descontextualizado y alejado de su utilidad práctica a la hora de resolver problemas.

En este sentido los «problemas de compra de caballos» pueden resultar de especial interés didáctico por cuanto se hallan, desde el punto de vista de su resolución, en un punto intermedio entre la aritmética y el álgebra. El interés de trabajar con este tipo de problemas se sustenta, al menos, en que:

- Pueden resolverse atendiendo únicamente a significados y técnicas propias de los números racionales positivos, conocidas por los alumnos. Para resolver estos problemas «aritméticamente» es necesario (basta observar el método que presenta Fibonacci) un manejo profundo de los números racionales por lo que su resolución puede servir de colofón a la formación aritmética de los alumnos.
- El uso del lenguaje simbólico está sugerido de forma muy clara por el método aritmético anterior. Cuando se habla de «el primero», «el tercero», etc. es fácil justificar, en base a su utilidad, la idea de utilizar letras para representar esas cantidades o para evitar «trabalenguas».

- La resolución algebraica completa es compleja. Esto, que podría parecer un inconveniente, no lo es tanto por cuanto aleja de los alumnos la impresión (falsa, por lo demás) de que el álgebra es siempre el mejor modo de resolver un problema.
- La existencia de métodos esencialmente diferentes para resolver el problema muestra a los alumnos el hecho de que, casi en ningún caso, hay una única forma de trabajar en matemáticas.

El interés didáctico de estos problemas, que acabamos de mostrar, justifica también plenamente el interés de trabajarlos a un nivel superior, con profesorado de secundaria en formación. En este caso, una serie de actividades a llevar a cabo con este tipo de estudiantes podría ser la siguiente:

a) Proponer uno de los problemas estudiados que aparecen en el *Liber Abaci* y solicitar a los estudiantes que lo resuelvan sin recurrir al álgebra.
b) Presentar la resolución de Fibonacci por la regla de la proporción. Discutir dicho método y compararlo con el que hayan podido utilizar ellos.
c) Pedirles que resuelvan ahora el problema recurriendo al álgebra.
d) Presentar uno de los procedimientos algebraicos utilizados por Euler, por ejemplo. Discutir dicho método y compararlo con el que hayan usado ellos.
e) Presentar la primera estrategia de resolución de Juan de Ortega (sección 6) y pedirles que traten de justificar por qué funciona y/o que lo traduzcan al lenguaje algebraico.
f) Comparar posibles ventajas e inconvenientes de ambos enfoques (aritmético y algebraico). ¿Para qué alumnos puede ser mejor uno que otro?

Como actividades adicionales que pueden llevarse a cabo, a modo de ejemplo, se nos ocurren:

- Investigar sobre las reglas de falsa posición. Historia, utilidad, justificación.
- Demostrar, rigurosamente, los métodos generales presentados en las secciones 5.2 y 5.3.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Euler, L. (1795). *Élémens d'algébre*. Lion: Bruyset.
Heath, T. (1910). *Diophantus of Alexandria. A study in the history of greek algebra.* Cambridge: Cambridge University Press.
Kangshen, S., Crossley, J. N. y Lun, A.W. (Eds) (1999). *The nine chapters on the mathematical art.* Oxford: Oxford University Press.
Matzloff, J. C. (1988). *Histoire des mathématiques chinoises*. Paris: Masson.
Meavilla, V. (2005). La historia de las matemáticas y la resolución no algebraica de problemas: una propuesta didáctica. En *La Historia de la Ciencia como recurso de aula y de Investigación Didáctica.* Teruel.

Meavilla, V. (2007). *Aprendiendo de los grandes maestros. Selección de problemas lineales y cuadráticos rescatados de los Elementos de Álgebra de Leonhard Euler (1707–1783)*. Badajoz: Federación Española de Sociedades de profesores de Matemáticas.

Ortega, J. de (1512). *Conpusicion de la arte de la arismetica y juntamente de geometria: fecha por…* León: en casa de Maistro Nicolau de Benedictis: por Joannnes Trinxer librero de Barcelona.

Rey Pastor, J. (1926). *Los matemáticos españoles del siglo XVI*. *Biblioteca Scientia*, 2.

Sánchez, J. A. (1947). *La aritmética en Grecia.* Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

Sigler, L.E. (2002). *Fibonacci's Liber Abaci. A translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation.* New York: Springer-Verlag.

Texeda, G. de (1546). *Suma de Arithmetica practica y de todas mercaderias con la horden de contadores*. Valladolid: Francisco Fernandez de Cordoua.

Van der Waerden, B. L. (1985). *A history of Algebra. From al-Khwarizmi to Emmy Noether*. Berlín: Springer-Verlag.

Vera, F. (1970). *Científicos griegos* (dos volúmenes). Madrid: Aguilar.

Woepcke, F. (1853). *Extrait du Fakhrî, traité d'Algèbre par Abou Bekr Mohammed ben Alhaçan Alkarkhî* (*manuscript 952, supplément arabe de la bibliothèque Impériale*). Paris: Imprimerie Impériale.

Youschkevitch, A. P. (1976). *Les mathémathiques arabes (VIIIe – XVe siècles).* París: VRIN.