

revista de
EDUCACIÓN
Nº 370 OCTUBRE-DICIEMBRE 2015



Evaluación de conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental de futuros maestros

Assessing the didactic – mathematical knowledge of prospective primary school teachers on elementary algebraic reasoning

Juan D. Godino
Miguel R. Wilhelmi
Teresa Neto
Teresa F. Blanco
Ángel Contreras
Carmen Díaz-Batanero
Antonio Estepa
Aitzol Lasá



Evaluación de conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental de futuros maestros

Assessing the didactic – mathematical knowledge of prospective primary school teachers on elementary algebraic reasoning

DOI: 10.4438/1988-592X-RE-2015-370-303

Juan D. Godino
Miguel R. Wilhelmi
Teresa Neto
Teresa F. Blanco
Ángel Contreras
Carmen Díaz-Batanero
Antonio Estepa
Aitzol Lasa

Universidad de Granada

Resumen

Diferentes estudios sugieren la necesidad de incorporar desde edades tempranas el razonamiento algebraico elemental, que en las propuestas curriculares clásicas se inicia en la Educación Secundaria Obligatoria. En este trabajo se analizan los resultados de aplicar un cuestionario de evaluación de conocimientos didáctico - matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental a una muestra de estudiantes del Grado en Maestro en Educación Primaria. El objetivo es la elaboración de un diagnóstico sobre la competencia algebraica

⁽¹⁾ Investigación realizada como parte de los proyectos: EDU2012-31869 y EDU2013-41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO, España). También ha sido financiada por el FCT/MEC (Portugal) mediante los fondos nacionales (PIDDAC) y co-financiada por fondos FEDER a través de COMPETE - Programa Operacional Factores de Competitividad, en el ámbito del proyecto PEst-C/CED/UI0194/2013.

elemental y su didáctica de los futuros maestros, que permita enmarcar un programa formativo para estos, que garantice finalmente procesos de estudio efectivos en la educación primaria. La muestra está compuesta por 597 estudiantes de las Universidades de Granada, Jaén, Pública de Navarra, Santiago de Compostela en España y de Aveiro en Portugal. En estas universidades, los grupos se constituyen homogéneos *ad extra* y heterogéneos *ad intro*. Se propone pues la selección intencional de grupos completos en cada universidad. El cuestionario consta de 25 ítems que evalúan tanto conocimientos algebraicos como conocimientos sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra en Educación Primaria. El análisis cuantitativo de los resultados ha permitido explorar las características psicométricas del instrumento (índices de dificultad, discriminación, fiabilidad y validez). La comparación de los programas de formación en matemáticas y su didáctica entre las distintas universidades participantes revela el énfasis psicopedagógico del Plan de estudios vigente y muestra una formación disciplinar deficiente, que, en particular, no incluye el bloque de razonamiento algebraico. Los resultados muestran un bajo nivel de conocimientos generalizado en las distintas componentes del conocimiento didáctico - matemático, con diferencias significativas entre las universidades. Se concluye que es necesario revisar los programas de formación y planificar el diseño de acciones formativas específicas sobre los contenidos algebraicos elementales, a fin de capacitar a los futuros maestros para que puedan promover en los alumnos de primaria el progresivo desarrollo del pensamiento algebraico.

Palabras clave: formación de maestros, evaluación, conocimiento algebraico, conocimiento didáctico, estudio comparado.

Abstract

Different studies suggest the need to introduce elementary algebraic reasoning at an early age, which in current curricular proposals is only taught in Secondary Education. In this paper, the responses to a questionnaire evaluating prospective primary school teachers' didactic-mathematical knowledge regarding elementary algebraic reasoning are analysed. The aim is to provide a diagnosis of prospective primary school teachers' knowledge regarding elementary algebra and its teaching. The results will be used to develop a training programme for teachers, which ultimately ensures an effective study process in primary education. The sample consisted of 597 students from the Universities of Granada, Jaén, Public University of Navarra, Santiago de Compostela in Spain, and the University of Aveiro in Portugal. The questionnaire comprises 25 items that assess algebraic and pedagogical content knowledge in primary education. Taking into account that in these universities the groups are *ad extra* homogeneous and *ad intro* heterogeneous, entire groups were intentionally selected at each university. The quantitative analysis of the results enabled the estimation of the instrument psychometric properties (difficulty and discrimination indexes, reliability and validity). The comparison of the training programmes in mathematics and the

way in which the subject is taught in the different universities reveals that current curriculum emphasizes on the psycho-pedagogical area. It also reveals an unsatisfactory disciplinary training that does not include algebraic reasoning. Results show significant differences among universities in the participants' level of knowledge in the various didactic - mathematical knowledge components. We conclude that it is necessary to improve the teachers' education programmes so they can progressively foster their pupils' algebraic reasoning. To achieve this goal these programmes should include specific training activities on elementary algebraic reasoning.

Keywords: primary school teachers, assessment, algebraic knowledge, didactical knowledge, comparative study

Introducción

La formación matemática y didáctica de los profesores es un campo de investigación y desarrollo que se viene consolidando en educación matemática por ser un factor clave en la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje. En España, esta formación tiene lugar en las Facultades de Ciencias de la Educación y está condicionada por un contexto normativo cambiante y por la escasez de recursos humanos, tecnológicos y temporales. La implantación del Grado en Maestro en Educación Primaria (GMEP), en el marco del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES), y la relativa consolidación de la investigación en los departamentos de didácticas específicas están abriendo, no obstante, nuevas posibilidades para la mejora de los planes y programas formativos de los maestros.

En este artículo se presentan resultados de un proyecto de investigación sobre "Evaluación y desarrollo de conocimientos matemáticos y didácticos en la formación inicial en Magisterio en el campo del razonamiento algebraico elemental". Se trata de aportar nuevos conocimientos, propuestas instruccionales y recursos metodológicos para la mejora de la formación inicial en matemáticas y su didáctica para la Educación Primaria, teniendo en cuenta el contexto educativo español y la perspectiva de los nuevos planes de estudio.

Nuestro trabajo tiene una clara relación con el estudio TEDS-M² (Estudio internacional sobre formación inicial en matemáticas de los maestros) (Tatto et al., 2008; INEE, 2012; Sanz & Martín, 2014), aunque restringido a un aspecto específico de la formación matemático-didáctica de los futuros maestros, el “razonamiento algebraico elemental”, y a una muestra de cinco instituciones universitarias de formación de profesores, cuatro españolas (Granada, Jaén, Pública de Navarra, Santiago) y una portuguesa (Aveiro).

El razonamiento algebraico, como herramienta de modelización matemática, es aplicable a los distintos bloques de contenido (aritmética, geometría, medida, análisis de datos y probabilidad); asimismo, los procesos de generalización y simbolización y las nociones de relación, variable, ecuación y función, constituyen herramientas imprescindibles en el trabajo matemático, tanto profesional, como en la matemática escolar. En los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) se propone el álgebra desde Preescolar como uno de los cinco bloques de contenido, junto con Números y Operaciones, Geometría, Medida, Análisis de datos y Probabilidad.

También en las nuevas orientaciones curriculares de España (MECD, 2014) se señala la conveniencia de desarrollar el pensamiento algebraico en Educación Primaria; en concreto, se indica que hay que “*conseguir que todo el alumnado, al acabar la Educación Primaria, sea capaz de describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones*” (p. 19387). Así, la iniciación al álgebra forma ya parte de los núcleos de continuidad, es decir, “*aquellos aspectos centrales de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que presumiblemente serán estables en el tiempo*” (Wilhelmi, 2014, 33).

Ahora bien, si la matemática escolar debe contemplar el álgebra como un nuevo contenido transversal con los demás bloques temáticos, los

⁽²⁾ TEDS-M ha sido el primer estudio comparativo a nivel internacional y a gran escala, en educación superior, centrado en la formación inicial de los profesores de matemáticas de educación primaria y primeros cursos de educación secundaria. Los datos de TEDS-M fueron recogidos en 2008, por lo que la situación que describen se refiere a los planes de estudio y condiciones existentes en ese momento. Con posterioridad a esa fecha se han producido cambios importantes en los planes de estudios universitarios españoles para la formación de maestros.

profesores deben participar de esta nueva visión ampliada y adquirir las competencias básicas en el razonamiento algebraico elemental. En trabajos previos (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012; Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi, 2014) hemos presentado unos primeros resultados de este componente del proyecto orientado al estudio de los problemas didácticos que plantea la formación en álgebra y su didáctica en GMEP.

En Godino et al. (2015) presentamos el diseño de un cuestionario para evaluar aspectos relevantes de los conocimientos matemáticos y didácticos (CDM) de los maestros en formación sobre razonamiento algebraico elemental (RAE). La aplicación del cuestionario CDM-RAE a muestras representativas de maestros en formación permite conocer efectivamente el estado de sus conocimientos didáctico – matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental y disponer de criterios para diseñar acciones formativas basadas en dicho estado.

En este trabajo se describen los conocimientos matemáticos y didácticos sobre RAE de los estudiantes del GMEP y se relacionan con los programas de formación que están recibiendo. Es decir, se afronta el problema de diagnosticar la competencia matemática y didáctica en RAE de los futuros maestros según la enseñanza programada.

Para ello, tras esta introducción general, se describe el marco teórico en el que se basa la construcción del cuestionario, así como las variables tenidas en cuenta. A continuación se describe el contexto y la muestra de estudiantes a los que se aplica el cuestionario. Luego, se presentan los resultados globales y parciales del estudio cuantitativo, indicando algunas propiedades psicométricas del instrumento y distinguiendo los conocimientos algebraicos y didácticos. Finalmente, se sintetizan las conclusiones y se discuten las implicaciones del estudio.

Marco teórico

El marco teórico en el que se apoya esta investigación tiene dos componentes: 1) Naturaleza del razonamiento algebraico en educación primaria (Carragher & Schliemann, 2007; Cai & Knuth, 2011); y 2) Conocimiento didáctico – matemático del profesor de matemáticas (Godino, 2009). Estos componentes fundamentan el instrumento de evaluación usado en esta investigación.

Godino, Aké, Gonzato & Wilhelmi (2014) proponen un modelo de RAE estructurado en cuatro niveles de algebrización. Este modelo tiene en cuenta los objetos y procesos que intervienen en la actividad matemática. En el nivel 0, no se incorpora en la actividad matemática ningún rasgo algebraico, mientras que el nivel 3 es claramente algebraico. Los niveles intermedios 1 y 2, que suponen unos niveles progresivos de algebrización, ponen en juego algunos objetos y procesos de índole algebraica, aunque retienen aspectos aritméticos.

En cuanto a la modelización adoptada para el conocimiento³ didáctico – matemático del profesor se tiene en cuenta dos tipos de variables: contenido algebraico y contenido didáctico. Para la variable *contenido algebraico* se consideran tres valores o categorías, en las cuales a su vez se pueden distinguir diversas subcategorías:

- *Estructuras* (relación de equivalencia; propiedades de las operaciones, ecuaciones, ...)
- *Funciones* (patrones aritméticos, patrones geométricos; función lineal, afín, cuadrática, ...)
- *Modelización* (problemas de contexto resueltos mediante el planteo de ecuaciones o relaciones funcionales)

Para la variable *contenido didáctico* (referido a un contenido algebraico, sea propio del nivel de primaria o más avanzado) se consideran las categorías siguientes:

- *Faceta epistémica*: reconocimiento de objetos y procesos algebraicos (representaciones, conceptos, procedimientos, propiedades; generalización, modelización); reconocimiento de niveles de algebrización.
- *Faceta cognitiva*: significados personales de los alumnos (conocimiento, comprensión y competencia sobre contenidos algebraicos elementales); conflictos de aprendizaje sobre objetos y procesos algebraicos.
- *Faceta instruccional*: recursos para la enseñanza del álgebra en primaria (situaciones – problema, medios técnicos), y su adecuación al currículo escolar.

⁽³⁾ En este trabajo usamos la noción de conocimiento en un sentido ampliado, incluyendo comprensión y competencia sobre los temas abordados.

Método

Instrumento

El instrumento para la recogida de datos es el cuestionario CDM-RAE (ver anexo) que está constituido por un conjunto de 10 tareas, cada una de las cuales está formada por ítems que evalúan aspectos del contenido algebraico y del contenido didáctico – algebraico. El proceso de construcción de dicho cuestionario, la discusión de su validez y fiabilidad ha sido realizado en Godino et al. (2015).

En la tabla I se presenta la clasificación de los distintos ítems del cuestionario según las categorías de conocimientos didáctico-matemáticos sobre RAE. Este instrumento no pretende evaluar todas las categorías de conocimientos didácticos y matemáticos propuestas por el modelo CDM-RAE, ya que está diseñado para recabar información escrita de los estudiantes en un tiempo limitado (2h aproximadamente).

Se debe tener en cuenta que las categorías de CDM - RAE no son disjuntas o excluyentes; así, un mismo ítem puede estar en más de una categoría. Por ejemplo, el ítem 10a), “Enuncia una variante del problema que pueda servir para iniciar el estudio de las funciones”, involucra al contenido “funciones”, pero también a “modelización”. Asimismo, se pide que el estudiante enuncie una variante de problema con un fin instruccional específico, de tal manera que el futuro docente debe movilizar conocimiento sobre un “recurso instruccional”. Aún más, el ítem también involucra un conocimiento especializado del contenido matemático en sí mismo, esto es, la faceta epistémica en sus componentes situacional y regulativo (concepto de función y sus representaciones). Por esta razón, se incluyen algunos ítems en más de una celda en la tabla I.

TABLA I. Contenidos evaluados por cada ítem del cuestionario

CONTENIDO DIDÁCTICO	CONTENIDO ALGEBRAICO					
	Estructuras (E)		Funciones (F)		Modelización (M)	
	Primaria	Avanzado	Primaria	Avanzado	Primaria	Avanzado
Epistémico (Niveles de algebrización)	<u>EPI-E1</u> 2b; 4b	<u>EPI-E2</u> 7b;7c	<u>EPI-F1</u> 10b	<u>EPI-F2</u> 5c; 6b	<u>EPI-M1</u>	<u>EPI-M2</u> 9b
Cognitivo (Significados personales)	<u>COG-E1</u> 1a; 1b 2a; 3b; 4c	<u>COG-E2</u>	<u>COG-F1</u> 6c	<u>COG-F2</u>	<u>COG-M1</u>	<u>COG-M2</u>
Instruccional (Situaciones y recursos)	<u>INS-E1</u> 8b	<u>INS-E2</u> 8b	<u>INS-F1</u> 8b	<u>INS-F2</u> 5b; 8b; 10a	<u>INS-M1</u> 9c); 10a	<u>INS-M2</u> 8b
Contenido algebraico (solo conocimiento común o avanzado)	<u>ALG-E1</u> 4a; 3a	<u>ALG-E2</u> 7a	<u>ALG-F1</u> 5a; 10b;	<u>ALG-F2</u> 6a; 8a; 9a	<u>ALG-M1</u>	<u>ALG-M2</u> 9a

Fuente: Godino et al. (en prensa)

VARIABLES DEPENDIENTES

El primer foco de atención consiste en definir la variable cuantitativa “grado de corrección de las respuestas a los 25 ítems del cuestionario”. Se ha considerado conveniente valorar positivamente las respuestas parcialmente correctas, por lo que la puntuación asignada a cada ítem ha sido:

- 0 puntos si la respuesta es incorrecta.
- 1 punto si es parcialmente correcta,
- 2 puntos si es correcta.

Además de la variable “puntuación total”, suma de puntuaciones en el conjunto de los 25 ítems (0 a 50 puntos), se definen variables cuantitativas relativas al “conocimiento matemático común y avanzado” y al “contenido didáctico”, que representan la suma por filas o columnas de las variables dadas en la tabla I.

a) Relativas al conocimiento matemático común y avanzado

A1_ALG: evalúa conocimientos de “álgebra” que son propios del nivel de educación primaria (conocimiento común) o de los primeros cursos

de secundaria (conocimiento avanzado). Esta escala incluye los ítems, 3a, 4a, 5a, 6a, 7a, 8a, 9a, 10b.

A2_EST: evalúa conocimientos relacionados con propiedades de las estructuras algebraicas que se usan en la resolución de ecuaciones. Incluye los ítems, 1a, 1b, 2a, 2b, 3a, 3b, 4a, 4b, 4c, 7a, 7b, 7c, 8b.

A3_FUN: evalúa conocimientos relacionados patrones geométricos y funciones. Incluye los ítems, 5a, 5b, 5c, 6a, 6c, 8a, 8b, 9a, 10a, 10b.

A4_MOD: evalúa conocimientos relacionados con la modelización algebraica (usando ecuaciones o funciones). Incluye los ítems, 8b, 9a, 9b, 9c, 10a.

b) Relativas al contenido didáctico

CD1_EPI: evalúa conocimientos relativos a la faceta epistémica del CDM-RAE, incluyendo los ítems, 2b, 4b, 5c, 6b, 7b, 7c, 9b, 10b.

CD2_COG: evalúa conocimientos relativos a la faceta cognitiva, incluyendo los ítems, 1a, 1b, 2a, 3b, 4c, 6c.

CD3_INS: evalúa conocimientos relativos a la faceta instruccional, incluyendo los ítems, 5b, 8b, 9c, 10a.

Las distintas variables dependientes consideradas se componen de un número de ítems diferente que puntúan 0, 1 o 2, por lo que su rango de variación es distinto. Para facilitar la comparación e interpretación de las puntuaciones obtenidas hemos hecho un cambio de escala en todas ellas reduciéndolas al intervalo [0, 10].

Para asegurar la fiabilidad en el proceso de codificación de las respuestas de los estudiantes se elaboró un protocolo de criterios a seguir con ejemplos ilustrativos de los tipos de respuestas; asimismo se discutieron conjuntamente algunos casos de dudosa interpretación.

Variables explicativas

Con el fin de interpretar los resultados de la evaluación de los conocimientos de los estudiantes se tienen en cuenta las siguientes variables explicativas:

- Tasa de admisión al Grado en Maestro en Educación Primaria (razón entre el número de plazas ofertadas y el número de solicitudes de admisión).

- Nota de corte en el examen de selectividad para ser admitido.
- Momento en el que se aplicó la prueba: 1: se aplicó al comienzo de la formación; 2: se aplicó al final de la formación.

Descripción del contexto y la muestra

La población de interés en esta investigación son los estudiantes españoles del Grado en Maestro en Educación Primaria (GMEP) (MECD, 2007). El cuestionario ha sido aplicado a varios grupos de estudiantes de las universidades de Granada, Jaén, Pública de Navarra, Santiago de Compostela, que cursan el GMEP bajo los nuevos planes de estudios. También ha sido aplicado a una muestra de estudiantes de la universidad de Aveiro, lo cual permite hacer un estudio comparado. Tanto en España como en Portugal los planes de estudios universitarios han sido revisados en el marco del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES).

El número de créditos asignados al área de Didáctica de la Matemática en las directrices curriculares españolas es de 18 (Plan 2010), que son los que se imparten en las universidades de Jaén, Pública de Navarra y Santiago; en Granada se imparten 22. A pesar de que la carrera de Magisterio ha pasado de 3 a 4 años y que, por tanto, el número de créditos totales ha pasado de 180 a 240, el perfil de estos estudios continúan teniendo un fuerte componente psico-pedagógico. La moda del porcentaje de créditos asignados a la formación en matemáticas y su didáctica es del 7,5%, que sigue siendo prácticamente el mismo que en el Plan de 1991-2010 (6,7% según el estudio de Rico, Gómez & Cañadas, 2014).

No es posible incluir en este artículo un análisis detallado de los contenidos de matemáticas y su didáctica impartidos en las cinco universidades similar al realizado por Rico et al. (2014), pero sí hemos constatado que el bloque de álgebra no figura de manera explícita en los programas de las correspondientes asignaturas. Se pone el énfasis en el estudio de números, medida, geometría y análisis de datos. En la Universidad de Aveiro, a pesar de que la carrera está organizada en 3 cursos se incluyen varias materias que contemplan profundizar en la formación matemática de los futuros maestros, pero el conocimiento algebraico se trata de manera escueta en el marco de la materia Didáctica de la Matemática y Tecnología Educativa.

En las Universidades de Granada y Aveiro el cuestionario se aplicó el último curso en que los estudiantes reciben formación en matemáticas y su didáctica. En las restantes universidades el cuestionario se aplicó al comienzo de la formación matemática, pero dado que posteriormente no se contempla una formación explícita sobre RAE los resultados son indicativos en todos los casos del estado de sus conocimientos profesionales sobre RAE con el cual se enfrentarán al ejercicio de la profesión.

El cuestionario se aplicó a grupos de clase completos ya que la finalidad era, no solo recabar información evaluativa sobre el estado de los conocimientos de los estudiantes, sino también usar la actividad de resolución de las tareas como dispositivo para una acción formativa posterior. El informe aquí presentado se refiere solo a los resultados evaluativos.

En la tabla II mostramos el tamaño de muestra en cada universidad y los valores de tres posibles variables explicativas de las diferencias en las puntuaciones entre las universidades.

TABLA II. Distribución de la muestra según universidades y variables explicativas

Universidad	Frecuencia	Porcentaje	Nota de corte		Tasa admisión	Momento de aplicación
			Media 2011-2014	Desviación típica		
Aveiro	66	11,06	6,542	0,227	0,191	2
Granada	91	15,24	5,920	0,146	0,333	2
Jaén	230	38,53	5,000	0,000	0,531	1
Pública de Navarra	129	21,61	7,070	0,233	0,316	1
Santiago	81	13,57	6,740	0,289	0,158	1
TOTAL	597	100,00				

Fuente: Elaboración propia. Los datos relativos a la nota de corte y el cupo de acceso han sido extraídos de los siguientes sitios: Aveiro (Direcção Geral de Ensino Superior, DGES): <http://www.acessoensinosuperior.pt/detcursopi.asp?codc=9853&code=0300> Granada – Jaén (Junta de Andalucía): <http://www.juntadeandalucia.es/economiainnovacionyciencia/sguit> Pública de Navarra (Universidad Pública de Navarra): <http://www.unavarra.es/estudios/acceso-y-matricula/grados/notas-de-corte> Santiago (Comisión Interuniversitaria de Galicia): <http://ciug.cesga.es/notascorte.html>

Análisis de datos

Para el análisis de los ítems se han aplicado técnicas estadísticas descriptivas (promedios, dispersiones, gráficos de cajas). Tras la

comprobación de la normalidad de las puntuaciones totales y de las subescalas se han aplicado pruebas inferenciales paramétricas para la comparación de grupos que incluye el Análisis de la Varianza. Finalmente se realiza un análisis factorial para explorar la estructura de las respuestas de los participantes a los ítems.

Resultados del estudio cuantitativo

En este apartado se estudian, en primer lugar, algunas características psicométricas del cuestionario CDM-RAE. Este estudio, que complementa al realizado en Godino et al. (2015), es necesario ya que el tamaño de la muestra es notablemente superior (597 estudiantes) y permite ajustar mejor algunos de los indicadores. Seguidamente analizamos los resultados obtenidos sobre el nivel de conocimientos sobre álgebra y didáctica del álgebra, relacionando dichos conocimientos con las oportunidades de aprendizaje ofrecidas en las distintas universidades.

Algunas propiedades psicométricas del instrumento

Análisis de ítems

La tabla III incluye los índices de dificultad de los ítems del cuestionario calculados para toda la muestra. Este índice no es el porcentaje de respuestas correctas ya que se han asignado puntuaciones de 0, 1 y 2, según el grado de corrección de las respuestas. Se ha calculado la media de puntuaciones de cada ítem y para facilitar la interpretación se ha transformado dicha puntuación media al intervalo [0 – 100]. Como se indica en la tabla III la puntuación media ha sido de 32.5 (error típico, 1.43) (en una escala de 0 a 100), lo cual indica que dichos conocimientos se pueden calificar de insuficientes. De hecho, únicamente 5 ítems tienen un índice de dificultad superior a 50, contra los 21 con índice inferior a este nivel; además, 11 ítems tienen un índice de dificultad inferior a 30 (al menos 7 de cada 10 respuestas es incorrecta).

TABLA III. Índice de dificultad de los ítems del cuestionario CDM-RAE (n=597)

ITEM. Descriptor	Índice de dificultad		Discriminación: Diferencia de medias (P_{33} - P_{66})	
	M	Error típico	t	p
1a. Igualdad resultado aritmético. Explicación	80.7	1.40	6.08	.000
1b. Igualdad resultado aritmético. Interpretación	55.4	1.90	11.64	.000
2a. Igualdad equivalencia. Explicación	69.0	1.64	8.39	.000
2b. Igualdad equivalencia. Propiedades	15.5	1.20	6.08	.000
3a. Suma tres números. Generalización	48.0	1.61	10.08	.000
3b. Suma tres números. Tipo de justificación	30.7	1.73	8.44	.000
4a. Suma incompleta. Resolución y explicación	42.3	1.95	10.64	.000
4b. Suma incompleta. Solución algebraica	3.8	0.65	4.16	.000
4c. Suma incompleta. Solución escolar	10.2	1.14	5.27	.000
5a. Patrón hexagonal. Dos términos	57.6	1.66	8.84	.000
5b. Patrón hexagonal. Generalización algebraica	15.0	1.25	7.98	.000
5c. Patrón hexagonal. Tipos de objetos algebraicos	6.1	0.87	5.39	.000
6a. Patrón cuadrados. Solución general	42.4	1.76	14.35	.000
6b. Patrón cuadrados. Técnicas posibles	30.8	1.60	14.14	.000
6c. Patrón cuadrados. Solución escolar	31.9	1.58	11.63	.000
7a. Coste comida. Resolución	32.7	1.84	10.86	.000
7b. Coste comida. Solución aritmética	12.1	1.30	7.63	.000
7c. Coste comida. Solución algebraica	10.0	1.17	7.24	.000
8a. Interpretación de expresiones	22.6	1.27	11.27	.000
8b. Enunciado de problemas	20.9	1.30	10.16	.000
9a. Gráficas funciones. Justificación	75.0	1.54	8.29	.000
9b. Gráficas funciones. Reconocimiento objetos	30.5	1.41	10.79	.000
9c. Gráficas funciones. Currículo	43.0	1.52	6.49	.000
10a. Funciones lineales. Enunciados	16.2	1.35	8.46	.000
10b. Funciones lineales. Reconocimiento álgebra	10.6	1.10	7.61	.000
DIFICULTAD MEDIA	32.5	1.43	35.85	.000

Fuente: Elaboración propia

En la segunda columna se incluye el índice de discriminación de los ítems como la diferencia de medias entre el grupo de bajo rendimiento (percentil 33) y el grupo de rendimiento superior (percentil 66) resultando todos los ítems con una adecuada discriminación ($p < .001$).

Fiabilidad y validez

El coeficiente de fiabilidad obtenido para la escala (Alfa de Cronbach), aplicada a la muestra de 597 estudiantes, ha sido de .783 ($> .7$), que es *acceptable* (Hair, Anderson, Tatham & Black, 2010; George & Mallery, 2003).

Para obtener un indicio de validez de constructo del instrumento, se realiza un análisis factorial de componentes principales y *rotación varimax* (Kaiser, 1958) tras la verificación de la adecuación de los datos a este tipo de análisis. Se obtiene una solución de 8 factores. En la tabla 4 se presenta la matriz de componentes rotados, en la que se han suprimido aquellas cargas factoriales por debajo de .33 para una mejor interpretación de los resultados.

Cada factor está ligado a los ítems que componen cada tarea, lo cual refuerza la idea de la estrecha relación existente entre los conocimientos matemáticos y los conocimientos didácticos específicos implicados en la actividad matemática correspondiente. Se ha puesto de manifiesto que existe una correspondencia alta entre factor y tarea en los 8 factores, excepto en el 4 y en el 5.

El factor 4 concuerda básicamente con la tarea 4 (patrón hexagonal) con excepción del ítem 2b que también está incluido en este factor; el ítem 2b pide identificar las propiedades implicadas en la igualdad usada como equivalencia. El componente 5 ha agrupado ítems correspondientes a tres tareas: tarea 8 (interpretación de expresiones algebraicas y enunciado de problemas), tarea 3 (suma de tres números consecutivos, tipos de justificación que pueden dar los estudiantes), ítem 2a (explicación del uso de la igualdad como equivalencia). Un explicación posible de la agrupación es que en los tres ítems (2a, 3 y 8) el estudiante debe analizar una tarea, justificar una respuesta o interpretar un significado, es decir, tareas metamatemáticas que suponen no sólo un elevado grado de abstracción sino también de recursos didácticos para el análisis de la actividad matemática involucrada.

El resto de factores pueden ser descritos como sigue:

- Factor 1: Conocimientos didáctico – matemáticos ligados a la actividad matemática de reconocimiento de patrones geométricos.
- Factor 2: Conocimientos didáctico – matemáticos ligados a la modelización de problemas con estructura aritmético – algebraica.
- Factor 3: Conocimientos didáctico – matemáticos ligados a la interpretación de funciones lineales.
- Factor 6: Conocimientos didáctico – matemáticos ligados a la modelización funcional lineal.
- Factor 7: Conocimientos didácticos – matemáticos ligados al uso de la igualdad como equivalencia.

- **Factor 8: Conocimientos didáctico – matemáticos ligados al reconocimiento de propiedades aritmético – algebraicas del sistema de numeración decimal.**

Estos resultados apoyan la idea de que la preparación en didáctica de las matemáticas debe ser específica de los contenidos matemáticos, mediante una *didáctica en acción* (Wilhelmi, 2005) que parta de las necesidades en el progreso matemático y didáctico de los futuros docentes.

TABLA IV. Matriz de componentes rotados

ÍTEM. Descriptor	Componente							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1a. Igualdad resultado aritmético. Explicación							,842	
1b. Igualdad resultado aritmético. Interpretación							,719	
2a. Igualdad equivalencia. Explicación					,364		,474	
2b. Igualdad equivalencia. Propiedades				,463				
3a. Suma tres números. Generalización					,505			
3b. Suma tres números. Tipo de justificación					,700			
4a. Suma incompleta. Resolución y explicación								,678
4b. Suma incompleta. Solución algebraica								,647
4c. Suma incompleta. Solución escolar								,708
5a. Patrón hexagonal. Dos términos				,514				
5b. Patrón hexagonal. Generalización algebraica				,802				
5c. Patrón hexagonal. Tipos de objetos algebraicos				,750				
6a. Patrón cuadrados. Solución general	,770							
6b. Patrón cuadrados. Técnicas posibles	,806							
6c. Patrón cuadrados. Solución escolar	,791							
7a. Coste comida. Resolución		,824						
7b. Coste comida. Solución aritmética		,771						
7c. Coste comida. Solución aritmética		,687						
8a. Interpretación de expresiones					,521			
8b. Enunciado de problemas					,541			
9a. Gráficas funciones. Justificación			,712					
9b. Gráficas funciones. Reconocimiento objetos			,700					
9c. Gráficas funciones. Currículo			,809					
10a. Funciones lineales. Enunciados						,844		
10b. Funciones lineales. Reconocimiento álgebra						,844		

Método de extracción: Análisis de componentes principales. Método de rotación: Normalización Varimax con Kaiser. Fuente: Elaboración propia

Análisis comparativo de los conocimientos de los estudiantes

En tabla V incluimos las medias y desviaciones típicas de la variable “Puntuación total”, así como el tamaño de muestra en las distintas universidades. Para facilitar la comparación e interpretación de la puntuación total y las puntuaciones parciales hemos cambiado la escala al intervalo [0, 10]. En la figura I comparamos las distribuciones de frecuencias de la puntuación total en las cinco universidades mediante gráficos de cajas.

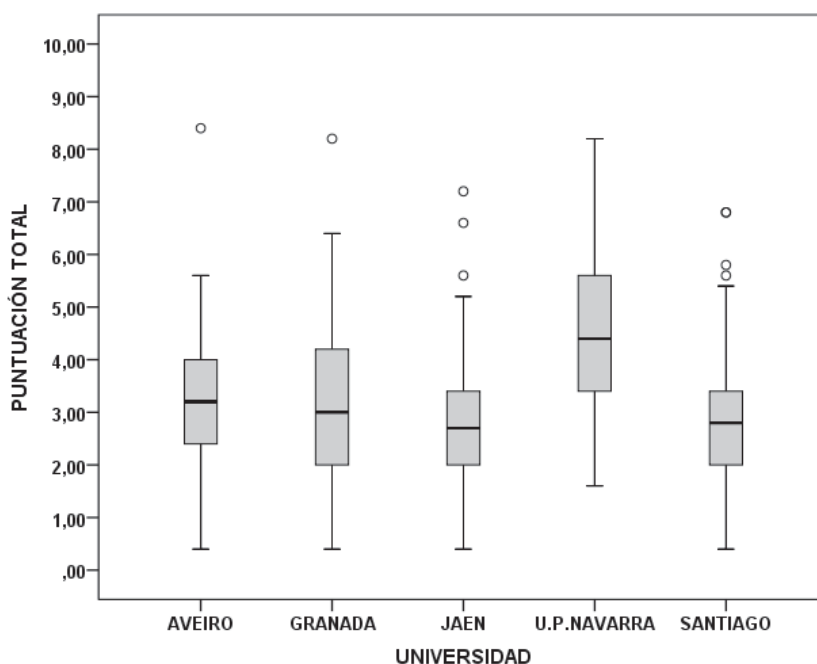
TABLA V. Puntuaciones medias y desviaciones típicas de la puntuación total según universidades

Universidad	n	M	DT
Aveiro	66	3.17	1.44
Granada	91	3.25	1.34
Jaén	230	2.77	1.08
Pública de Navarra	129	4.43	1.46
Santiago	81	2.85	1.32
TOTAL	597	3.25	1.43

Fuente: Elaboración propia

En todos los casos la puntuación media es inferior a 5. Sin embargo, existen diferencias significativas en las puntuaciones medias de las distintas universidades ($F= 37.05$, $p=.000$) destacando la Universidad Pública de Navarra (figura I). Además, a diferencia del resto de universidades, en la Pública de Navarra no se identifican valores atípicos superiores y, por lo tanto, si se suprimieran éstos en las otras universidades las diferencias de medias se acrecentarían.

FIGURA I. Comparación de la puntuación total mediante gráficos de cajas



Fuente: Elaboración propia

El coeficiente de correlación entre las puntuaciones medias de las universidades y la nota de corte para el acceso a la respectiva Facultad es de .27 mientras que con la tasa de admisión es de -.07. En ambos casos la relación no es estadísticamente significativa al nivel de confianza del 95%. Tampoco se han encontrado diferencias estadísticas significativas en las puntuaciones medias entre el grupo de sujetos que respondieron al cuestionario en el último curso de su formación ($M = 3.20$; $DT = 1.45$; Aveiro y Granada) y los que lo hicieron al comienzo ($M = 3.26$; $DT = 1.39$; Jaén, Pública de Navarra y Santiago). La prueba t de comparación de muestras independientes resultó ser no significativa ($t = 0.46$; $p = .644$). Una explicación plausible para este resultado es que los contenidos algebraicos no son estudiados de manera explícita en ninguna de las universidades.

Análisis de las variables parciales: conocimientos algebraicos y didácticos

El análisis de la varianza para estudiar las diferencias de medias en las variables puntuación total y las variables parciales entre las diferentes universidades (todas ellas transformadas al intervalo [0, 10]), permite afirmar que las diferencias son significativas en todas las variables, ya que el p -valor es .000 en todos los casos (tabla VI).

TABLA VI. Estadísticos descriptivos y comparación de medias entre las universidades

Variable	M	DT	F	p
A1_ALG: Conocimiento común y avanzado en álgebra	4.14	1.91	18.54	.000
A2_EST: Conocimiento de ecuaciones y relaciones	3.32	1.60	33.78	.000
A3_FUN: Conocimiento sobre funciones	2.98	1.73	26.77	.000
A4_MOD: Conocimiento sobre modelización	3.71	2.24	8.54	.000
CD1_EPI: Conocimiento sobre aspectos epistémicos	1.49	1.42	29.23	.000
CD2_COG: Conocimiento sobre aspectos cognitivos	4.63	2.05	26.56	.000
CD3_INS: Conocimiento sobre aspectos instruccionales	2.38	2.00	21.84	.000
TOTAL: Puntuación total	3.25	1.44	37.05	.000

Fuente: Elaboración propia

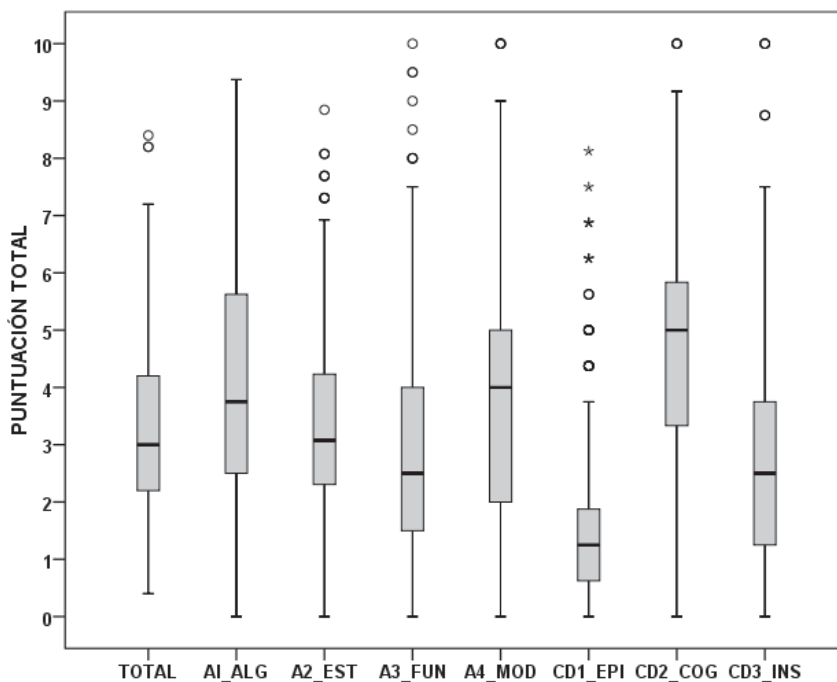
Aunque todas las puntuaciones son inferiores a 5 destaca las dificultades encontradas por los estudiantes para responder a las cuestiones de índole epistémica (CD1_EPI), esto es, aquellas que requieren un conocimiento especializado del contenido algebraico.

En la figura II mostramos las distribuciones de frecuencias mediante diagramas de cajas de la puntuación total junto con las 7 variables parciales.

Se observa en la figura II que en todas las variables, excepto en A1_ALG, hay valores atípicos. Si se suprimieran de los cálculos los valores de los promedios serían incluso inferiores de los reseñados en la tabla IV. Este hecho refuerza la tesis de la deficiencia de los conocimientos didáctico-matemáticos y la necesidad de acciones concretas para subsanar las deficiencias evidentes.

La figura III nos ayuda a analizar las diferencias en los conocimientos de los estudiantes según las variables parciales construidas. Sobre el mismo gráfico se representan las medias de las puntuaciones obtenidas en las 7 variables según las cinco universidades. Se puede observar que la tendencia en cada universidad se mantiene, si una universidad sube al pasar de una variable a otra las demás también suben o si alguna universidad baja al pasar de una variable a otra las otras también bajan, ya que se cortan muy pocas veces la línea poligonal del gráfico de línea de cada universidad, hecho que le da coherencia y rigor al estudio.

FIGURA II. Comparación de las distribuciones de las distintas variables mediante gráficos de cajas



Fuente: Elaboración propia

Asimismo, se observa en relación a estas variables el comportamiento diferenciado en la Universidad Pública de Navarra que tiene una puntuación superior en todas, sin intersección alguna con el diagrama de

líneas del resto de universidades. Este hecho es consistente con la comparación de la puntuación total mostrada mediante los gráficos de cajas, contribuyendo a la validez interna de los resultados.

Análisis de los conocimientos de índole algebraica

El análisis de los conocimientos de índole algebraica lo hacemos teniendo en cuenta las variables:

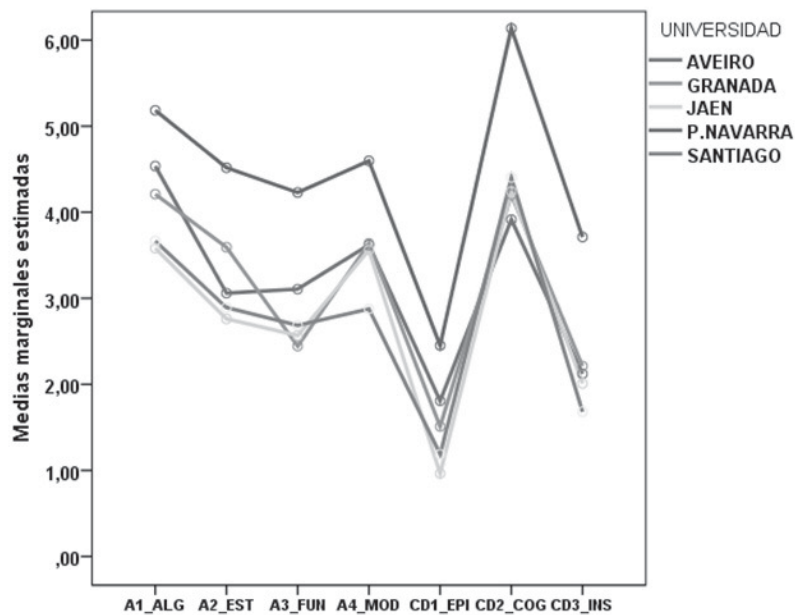
- A1_ALG: Conocimiento común y avanzado en algebra.
- A2_EST: Conocimientos sobre ecuaciones y relaciones.
- A3_FUN: Conocimientos sobre funciones.
- A4_MOD: Conocimientos sobre modelización.

En todas estas variables se obtiene una puntuación media insuficiente. La que mejor resultado ha obtenido ha sido A1_ALG (4.14 puntos) probablemente debido a que los ítems que la componen son de tipo procedimental, donde el estudiante debe realizar una serie de cálculos y ofrecer un resultado.

Le sigue A4_MOD (3.71 puntos), donde los ítems que componen esta variable se refieren a modelos sencillos estudiados en bachillerato, es la que está más dispersa (mayor desviación típica), aunque de manera uniforme (tiene pocos valores atípicos).

La siguiente en puntuación es A2_EST (3.32 puntos). Esta variable comprende las estructuras, relaciones y propiedades del armazón matemático, que no son dominadas por todos los estudiantes. Por último, la que ha obtenido menor puntuación ha sido A3_FUN (2.18 puntos), que tiene muchos valores atípicos por arriba, lo que permite afirmar que algunos estudiantes la dominan, mientras la mayoría, tienen carencias constatadas.

FIGURA III. Medias de las puntuaciones en las variables parciales



Fuente: Elaboración propia

Análisis de los conocimientos de índole didáctica

El análisis de los conocimientos de índole didáctica lo hacemos teniendo en cuenta las variables:

- CD1_EPI: Conocimientos sobre aspectos epistémicos.
- CD2_COG: Conocimientos sobre aspectos cognitivos.
- CD3_INS: Conocimientos sobre aspectos instruccionales.

Las puntuaciones medias en estas variables también pueden ser calificadas de insuficientes. La que mejor puntuación ha tenido es (CD2_COG (4.63 puntos), siendo la segunda en puntuación si tenemos en cuenta las 7 variables. Está distribuida muy uniformemente, ya que

tiene muy pocos valores atípicos, el 50% de los estudiantes están entre una puntuación (4-6) y el otro 50% se distribuyen uniformemente en los dos bigotes (gráfico de la caja).

Las otras dos variables son las que han obtenido la puntuación más baja, aun considerando las 7 variables analizadas. De ellas la puntuación más baja ha sido la de CD1_EPI (1.49 puntos). Si observamos el gráfico de la caja el 75% de los estudiantes tienen una puntuación inferior a 2, quedando el otro 25% entre 2 y 8, lo que proporciona muchos valores atípicos. Una posible explicación puede ser que las preguntas de los ítems que la componen no son usuales en la educación preuniversitaria, por lo que los estudiantes no tienen costumbre a responder a este tipo de cuestiones.

Por último, CD3_INS (2.38 puntos) es la segunda en las puntuaciones inferiores, indica una falta acusada de práctica instruccional en nuestros estudiantes. El 75% de los estudiantes tiene una puntuación inferior a 4, sin embargo el 25% restante tiene puntuación entre 6 y 10 con pocos valores atípicos. Es reseñable destacar aquí que no se perciben diferencias teniendo en cuenta el momento de realización del cuestionario en las distintas universidades, lo que sugiere una deficiencia no paliada a través de la formación.

Síntesis e implicaciones para la formación de maestros

Con este trabajo se aporta información significativa sobre el estado de los conocimientos de una muestra importante de futuros maestros en Educación Primaria acerca del razonamiento algebraico elemental (RAE). De esta manera, se completa otros estudios previos sobre la naturaleza del RAE (Godino et al., 2014) y la construcción de instrumentos de medida de los mismos (Godino et al., 2015).

En términos generales hemos desvelado importantes carencias en los conocimientos de los futuros maestros que se están formando actualmente en España en el marco del Plan de Estudios establecido en 2010 (MEC, 2007), de acuerdo con las directrices emanadas del Espacio Europeo de Educación Superior (Plan Bolonia). A pesar de que el Grado en Maestro en Educación Primaria ha incluido un cuarto año (lo que ha supuesto pasar de 180 créditos ECTS a 240), esto no ha modificado sustancialmente el perfil generalista y psico-pedagógico de la formación

de maestros. No se cuestiona la orientación actual del maestro-tutor, que tiene a cargo principalmente la docencia disciplinar en Lengua, Matemáticas y Conocimiento del Medio Natural y Social, sino la necesidad urgente de garantizar una formación en las distintas disciplinas que permita al docente afrontar con garantía los retos epistemológicos a los que debe hacer frente.

Los bajos resultados obtenidos por los estudiantes portugueses, con un plan de estudios bastante diferente al de las universidades españolas, permite apoyar la hipótesis según la cual el desarrollo de los conocimientos didáctico - matemáticos sobre RAE requiere una atención especial.

Rico et al. (2014, p. 58) informan que los resultados del estudio TEDS-M muestran la necesidad de poner un mayor énfasis en los temas de didáctica de la matemática y proporcionar una mejor cobertura para los temas de las matemáticas escolares: esto debería tenerse en cuenta para el futuro en los niveles institucional y formador. En este trabajo se aportan datos experimentales que sustentan estos análisis. Así, la situación continúa siendo claramente deficiente tras la implantación de los nuevos programas basados en las directrices del Espacio Europeo de Educación Superior, al menos en lo que respecta al bloque de contenido algebraico.

El estudio secundario de los resultados del TED-M realizado por Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez & Rico (2014) sobre conocimiento didáctico acerca de los números por parte de los futuros maestros de primaria españoles formados según el plan de 1991 destaca carencias en dichos conocimientos, "*que es necesario corregir en los nuevos programas*" (p. 296). Desafortunadamente los resultados de nuestro estudio, aunque centrado en el conocimiento didáctico - matemático sobre álgebra y realizado mediante la aplicación de un instrumento propio, no permite ser optimista en cuanto a la mejora de la formación de los maestros en el marco de los nuevos programas.

En este trabajo hemos tratado de explicar las diferencias en las puntuaciones medias entre las cinco universidades participantes mediante su posible relación con la nota de corte para acceso a los estudios y por la tasa de admisión. Aunque las correlaciones son diferentes de cero (positiva con la nota de corte y negativa con la tasa de admisión), sin embargo tales relaciones no han sido significativas. En futuras replicaciones de este trabajo sería necesario recabar información de otras posibles variables explicativas, como la nota de acceso de cada estudiante, o una medida del rendimiento académico en matemáticas en cursos previos.

Por otro lado, desde el punto de vista metodológico, hay que observar que las muestras han sido tomadas de manera intencional. Esto no resta representatividad de los grupos en las universidades participantes, ya que los estudiantes se distribuyen en los mismos de manera aleatoria, de tal manera que es posible asumir su representatividad con relación a las universidades. Sin embargo, otra mejora del estudio, en su faceta evaluativa del estado de los conocimientos sobre RAE de los futuros maestros de primaria, sería incluir una muestra más amplia de universidades, controlando explícitamente la distribución aleatoria y representativa de las muestras seleccionadas.

Por último, la variable CD3_INS, referida conocimientos sobre aspectos instruccionales de los futuros maestros, muestra puntuaciones muy bajas. Estos hechos sugieren la necesidad de integrar en la actividad matemática estrategias pedagógicas y didácticas que posibiliten a los estudiantes del GMEP la previsión de comportamientos de sus alumnos y de respuestas de intervención para la gestión y control de los procesos de estudio. Estas actividades están en muchos casos condicionadas por el número de estudiantes por grupo, que impiden la aplicación de metodologías más participativas y colaborativas, acordes con los presupuestos fundacionales del nuevo Espacio Europeo de Educación Superior.

Como líneas de futuro trabajo dentro del problema de evaluación de conocimientos didáctico – matemáticos sobre álgebra y su didáctica, y en el marco del modelo CDM-RAE, podemos mencionar el diseño de ítems relativos a las facetas,

- Afectiva, esto es, conocimientos de los futuros maestros sobre actitudes, motivación, emociones y creencias y su influencia en el aprendizaje del álgebra elemental.
- Ecológica, aspectos curriculares y conexiones con otros contenidos.
- Mediacional, uso de recursos tecnológicos en la enseñanza del álgebra.

Esta última faceta está estrechamente relacionada con los modelos TPACK⁴, que identifican los tipos de conocimientos que el docente

⁽⁴⁾ Del inglés, Technological Pedagogical Content Knowledge (Conocimiento Técnico-Pedagógico del Contenido). El enfoque TPACK extiende la noción teórica introducida por Shulman (1986) del "conocimiento del contenido pedagógico" (PCK). Una descripción sucinta del TPACK está disponible en la página Web (<http://www.tpack.org/>), donde se tiene acceso a bibliografía especializada.

necesita dominar para integrar la tecnología de una forma eficaz en la enseñanza que imparte.

Referencias bibliográficas

- Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer-Verlag.
- Carraher, D. W. y Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En, F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.
- George, D. y Mallery, P. (2003). *SPSS for Windows step by step: A Simple Guide and Reference. 11.0 Update*, 4.^a ed. Boston: Allyn & Bacon.
- Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebraización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32.1, 199-219.
- Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática-BOLEMA*, 26 (42B), 483-511.
- Godino, J. D., Aké, L., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A. Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, M. L. y Wilhelmi, M. D. (en prensa). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Enseñanza de las Ciencias*, en prensa.
- Gutiérrez-Gutiérrez, A., Gómez, P. y Rico, L. (2014) Spanish preservice primary school teachers' pedagogical knowledge of numbers: results from TEDS-M / Conocimiento didáctico de los estudiantes españoles de magisterio sobre números: resultados en TEDS-M. *Cultura y Educación: Culture and Education*, 26 (2), 265-297.
- Hair, J.F., Anderson, W.C., Tatham, R.L., Black, W.C. (2010). *Multivariate data analysis : a global perspective*, 7th ed. Upper Saddle River (NJ) : Pearson Prentice Hall.

- INEE. (2012). TEDS-M. *Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe español*. Madrid: Autor.
- Kaiser, H. F. (1958). The varimax criterion for analytic rotation in factor analysis. *Psychometrika*, 23(3), 187-200.
- MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria* (BOE 01/03/2014).
- MECD (2007). Orden ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado (BOE)* 312, de 29 de diciembre, 53747- 53750.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.
- Rico, L., Gómez, P. y Cañadas, M. C. (2014). Formación inicial en educación matemática de los maestros de Primaria en España, 1991-2010. *Revista de Educación*, 363, 35-59.
- Sanz, I., Martín, R. (2014). El estudio TEDS-M de la IEA en el marco del Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE). En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 67-81). Salamanca: SEIEM.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R., & Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.
- Wilhelmi, M. R. (2005). Papel de la didáctica de las matemáticas en la formación de profesores de secundaria. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* 8(1), 159-179.
- Wilhelmi, M. R. (2014). Matemáticas y su didáctica en Magisterio. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas* 66, 28-35.

Anexo: Cuestionario CDM-RAE

1. Considera la siguiente cuestión planteada a un alumno de primer ciclo de primaria:

¿Qué número se debe colocar en el recuadro para que la igualdad sea verdadera?

$$8 + 4 = \square + 5$$

Un alumno responde que el número es el 12,

- Explica cuál fue el posible razonamiento que condujo al alumno a dar esa respuesta.
- ¿Qué interpretación del signo = está realizando el alumno?

2. Se ha pedido a un alumno que indique si la expresión “ $13 + 11 = 12 + 12$ ” es verdadera o falsa.

El alumno responde lo siguiente:

Es verdadera porque restamos uno al doce y lo sumamos al otro doce, y se obtiene lo que está ahí (en el lado izquierdo).

- Explica el razonamiento que pudo seguir el alumno para plantear su respuesta.
- ¿Qué propiedades de la adición moviliza el alumno que justifica su respuesta?

3. Un alumno formuló la siguiente conjetura: “*Sumo tres números naturales consecutivos. Si divido el resultado por tres obtengo siempre el segundo número*”

- ¿Es válida la afirmación para todos los números naturales? ¿Por qué?
- ¿Qué tipo de justificación piensas podría dar un alumno de primaria a esta conjetura?

4. Observa detenidamente la siguiente suma, y determina el número que representa cada letra. Considera que cada letra tiene un valor distinto.

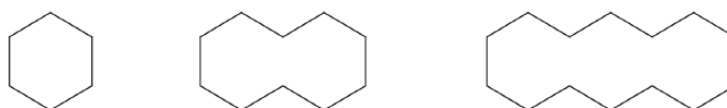
$$\begin{array}{r} A \ B \ C \\ A \ B \ C \\ + A \ B \ C \\ \hline 2 \ A \ C \ C \end{array}$$

- ¿Cuáles son los valores numéricos de A, B y C? ¿Cómo sabes que son correctos?

Explica tu razonamiento

- b) ¿Se puede resolver la tarea usando algún procedimiento algebraico? ¿Cómo sería esa resolución y qué nociones algebraicas se usarían?
- c) ¿Qué tipo de respuesta y justificación piensas podría dar un alumno de primaria a este problema?

5. Considera la siguiente secuencia de figuras.



- a) Representa los dos términos siguientes de la secuencia e indica el número de segmentos necesarios para construir cada una. Explica cómo lo haces.
- b) ¿Cómo cambiarías el enunciado de la tarea para inducir algún procedimiento de resolución que ponga en juego conocimientos de tipo algebraico?
- c) ¿Cuáles serían tales conocimientos algebraicos?

6. Observa la siguiente secuencia de tres figuras formadas por puntos:



- a) Determinar el número de puntos que tendrá la figura que estuviera en la vigésimo quinta (25^a) posición de esta secuencia, suponiendo que se continúa con la misma regla de formación de las figuras. Justifica la respuesta.
- b) Indicar las técnicas o diferentes maneras mediante las cuales se puede resolver el problema.
- c) ¿Consideras que esta tarea se puede proponer a alumnos de tercer ciclo de primaria? ¿Cómo podrían abordar la solución?

7. Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo

ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días.

- ¿Cuánto dinero recibió?
- ¿Se puede resolver el problema mediante procedimientos exclusivamente aritméticos? ¿Cómo?
- ¿Se puede resolver el problema usando conocimientos algebraicos? ¿De qué manera?

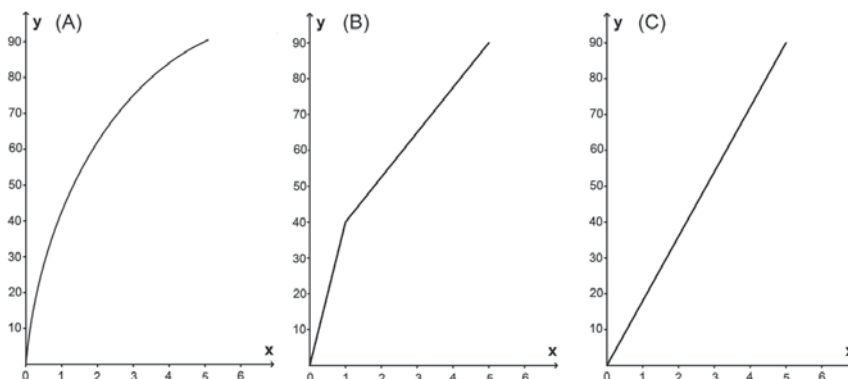
8. Analiza las siguientes expresiones y contesta:

- $4x + 5 = 25$
- $y = 2x + 1$
- $P = 2c + 2l$

- Describe la interpretación que haces de cada una de las expresiones anteriores.
- Enuncia tres problemas que se puedan proponer a alumnos de primaria cuya solución lleve a plantear estas expresiones.

9. Para llenar con agua un recipiente de una capacidad máxima de 90 litros se usa un grifo cuyo caudal es constante e igual a 18 litros por minuto.

- Indica cuál de las tres representaciones gráficas corresponde a la situación descrita, siendo que en el eje de las X se representa el tiempo en minutos y en el eje de las Y el volumen de agua en litros.



Respuesta: ____; Justificación:

- b) ¿Qué conocimientos matemáticos o de otro tipo se usan para resolver esta tarea?
- c) ¿Consideras que esta tarea es adecuada para ser propuesta a niños de educación primaria? En tal caso, de qué ciclo. Justifica tus respuestas.

10. Un profesor propone el siguiente problema a sus alumnos:

En una tienda venden el kg de peras a 2 € y cobran 10 céntimos de euro por la bolsa.

¿Cuánto costaría una bolsa de 4 kg de peras?

- a) Enuncia una variante del problema que pueda servir para iniciar el estudio de las funciones lineales. Supón que en una bolsa caben 4 kg.
- b) Resuelve el problema que enuncies e indica los conocimientos algebraicos que se usan.

Dirección de contacto: Juan D. Godino. Universidad de Granada, Facultad de Ciencias de la Educación, Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Educación. Campus de Cartuja. 18071 Granada. España. E-mail: jgodino@ugr.es

La *Revista de Educación* es una publicación científica del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte español. Fundada en 1940, y manteniendo el título de *Revista de Educación* desde 1952, es un testigo privilegiado de la evolución de la educación en las últimas décadas, así como un reconocido medio de difusión de los avances en la investigación y la innovación en este campo, tanto desde una perspectiva nacional como internacional. La revista es editada por la Subdirección General de Documentación y Publicaciones, y actualmente está adscrita al Instituto Nacional de Evaluación Educativa de la Dirección General de Evaluación y Cooperación Territorial.



GOBIERNO
DE ESPAÑA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN, CULTURA
Y DEPORTE

NIPO línea: 030-15-016-X

NIPO lbd: 030-15-017-5

ISSN línea: 1988-592X 0034-8082

ISSN papel: 0034-8082

www.mecd.gob.es/revista-de-educacion